Aufgaben zu Monotonie und lokalen Extrema (23.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(x)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 \mid f(0))$.

$f(0) = 3 - 2 \cdot \sin(0) = 3 \quad \rightarrow \quad (0|3)$

$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) \quad f'(0) = -2$

$y = m \cdot x + n \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -2 \cdot 0 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 3$

$t(x) = -2 \cdot x + 3$

b) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Der Wertebereich von $\sin(x)$ ist $[-1; 1]$
Der Wertebereich von $-2 \cdot \sin(x)$ ist $[-2; 2]$
Der Wertebereich von $3 - 2 \cdot \sin(x)$ ist also $[1; 5]$

Aufgabe 2 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph heißt G. Die Tangente an G im Punkt $P(1|f(1))$ heißt t, die Normale im selben Punkt heißt s.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung von t.

$f(1) = 1 + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad P(1|3)$

$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad f'(1) = -2$

$y = m \cdot x + n \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -2 \cdot 1 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 5$

$t(x) = -2 \cdot x + 5$

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck, welches durch t, s und die x-Achse gebildet ist, nicht gleichseitig ist.

Der Winkel zwischen Tangente und Normalen ist 90°, bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel 60° groß. Daher funktioniert es nicht.

Aufgabe 3 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad f''(x) = 6x - 12$

$0 = 3x^2 - 12x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$ und $x_2 = 3$

$f''(1) = -6 < 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_1 = 1$ ist ein lokales Maximum

$f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad H(1 \mid 0)$

$f''(3) = 6 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_2 = 3$ ist ein lokales Minimum

$f(3) = -4 \quad \rightarrow \quad T(3 \mid -4)$

b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 8$

$f'(x) = \frac{4}{9}x^3 - 4x \qquad f''(x) = \frac{4}{3}x^2 - 4$

$0 = \frac{4}{9}x^3 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4x \cdot (\frac{1}{9}x^2 - 1) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -3$ und $x_3 = 3$

$f''(0) = -4 < 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_1 = 0$ ist ein lokales Maximum

$f(0) = 8 \quad \rightarrow \quad H(0 \mid 8)$

$f''(-3) = 8 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_2 = -3$ ist ein lokales Minimum

$f(-3) = -1 \quad \rightarrow \quad T_1(-3 \mid -1)$

$f''(3) = 8 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_3 = 3$ ist ein lokales Minimum

$f(3) = -1 \quad \rightarrow \quad T_2(3 \mid -1)$

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12$

$0 = 4x^3 - 12x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4x \cdot (x^2 - 3) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}$ und $x_3 = \sqrt{3}$

$f''(0) = -12 < 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_1 = 0$ ist ein lokales Maximum

$f(0) = 5 \quad \rightarrow \quad H(0 \mid 5)$

$f''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_2 = -\sqrt{3}$ ist ein lokales Minimum

$f(-\sqrt{3}) = -4 \quad \rightarrow \quad T_1(-\sqrt{3} \mid -4)$

$f''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_3 = \sqrt{3}$ ist ein lokales Minimum

$f(\sqrt{3}) = -4 \quad \rightarrow \quad T_2(\sqrt{3} \mid -4)$

d) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \qquad f''(x) = x - 2$

$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$f''(2) = 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x = 2$ liegt kein lokales Extremum vor.

Vorzeichenwechsel als Gegenprobe: $f'(1) = \frac{1}{2}$ und $f'(3) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel

Aufgabe 4 ohne CAS (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ keine lokalen Extremstellen besitzen kann.

a) $f(x) = x^3 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad 0 = 3x^2 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 1$ hat keine Lösung
Somit gibt es kein Extremum.

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{x^2} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = \frac{1}{x^2}$ hat keine Lösung
Somit gibt es kein Extremum.

c) $f(x) = e^x + 2$

$f'(x) = e^x$ und diese Funktion ist immer größer 0, egal was für x eingesetzt wird. Also gibt es keine Nullstelle der ersten Ableitung und somit keine Extremstelle der Funktion.

Aufgabe 5 ohne CAS (3 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ und beziehen Sie in Ihre Argumentation auch die Verschiebung entlang der x- und der y-Achse mit ein.

$$f(x) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$$

$f'(x) = 2x + 2$. Diese lineare Funktion ist monoton steigend. Sie hat eine Nullstelle bei $x = -1$. Daher gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty; -1)$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1, \infty)$.

Das heißt: bis $x = -1$ fällt die Funktion $f(x)$ und ab $x = -1$ steigt die Funktion $f(x)$ streng monoton.

Die Verschiebung auf der y-Achse beeinflusst gar nichts, da sie beim Ableiten als Konstante wegfällt. Daher ist nur die Verschiebung auf der x-Achse relevant und durch $(x+1)^2$ wurde die Funktion um 1 Längeneinheit nach links verschoben. Deshalb ändert sich die Monotonie bei $x = -1$.

Aufgabe 6 ohne CAS (1+4 BE)

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.

$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot k \cdot x = 2x \cdot (2 \cdot x^2 - k)$

b) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1.
Ermitteln Sie den Wert von k.

Durch a) ist die Gleichung $0 = f'(x)$ besser lösbar, da nur die beiden Faktoren betrachtet werden. Daher ist $x_1 = 0$ und x_2 und x_3 ergeben sich aus der Lösung der Gleichung $0 = 2 \cdot x^2 - k \Leftrightarrow \frac{k}{2} = x^2 \Leftrightarrow x_2 = -\sqrt{\frac{k}{2}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{k}{2}}$

$f''(x) = 12 \cdot x^2 - 2 \cdot k$ Da $f''(0) = -2k < 0$ ist, ist bei $x_1 = 0$ somit der Hochpunkt. Daher sind bei x_2 und x_3 die beiden Tiefpunkte.

Für die y-Koordinate eines Tiefpunktes gilt: $f\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = \frac{k^2}{4} - k \cdot \frac{k}{2} = -\frac{k^2}{4}$

$-1 = -\frac{k^2}{4} \Leftrightarrow 4 = k^2$ Also ist $k = 2$ (da $k = -2$ entfällt, weil k positiv sein soll).

Aufgabe 7 (4 + 4 + 3 BE)

BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder wird auf horizontalem Untergrund eine 3m breite Sprungschanze installiert. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie für $x \in [-8; 0]$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{256}x^3 + \frac{3}{4}x + 2$ beschrieben werden. Abbildung 1 zeigt den zugehörigen Teil des Graphen von f.

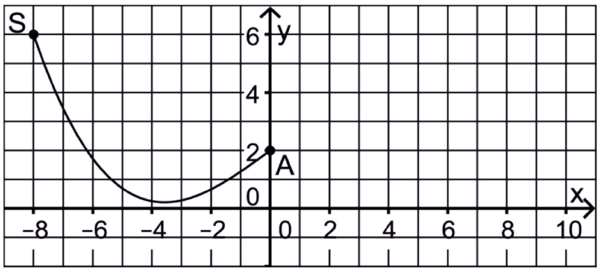

Abbildung 1: Sprungschanze

Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt $S\,(-8 \mid f(-8))$ dargestellt, der Absprungpunkt durch $A\,(0 \mid f(0))$. Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell den tiefsten Punkt der Schanze darstellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Höhendifferenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Schanze.

Ableitungen bestimmen: $f'(x) = -\frac{15}{256}x^2 + \frac{3}{4}$ $\quad f''(x) = -\frac{15}{128}x$

potentielle Extremstellen ermitteln:

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -3,5777$ und $x_2 \approx 3,5777$ (liegt aber nicht im Intervall $[-8; 0]$

Art des Extremums bestimmen:

$f''(-3,5777) \approx 0,42 > 0$ also liegt an der Stelle $x = -3,5777$ tatsächlich ein Minimum vor.

Punkte für die Höhendifferenz bestimmen (Tiefpunkt und Startpunkt):

$f(-8) = 6$, also $S(-8 \mid 6)$ und $f(-3,5777) \approx 0,2111$, also $T(-3,5777 \mid 0,2111)$.

Die Höhendifferenz ist $6m - 0,2111m = 5,7889m$

b) Veranschaulichen Sie in Abbildung 1 die mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt. Bestimmen Sie diese Steigung.

In der Zeichnung muss die Strecke zwischen S und A eingezeichnet werden.

Die Steigung ist die mittlere Änderung zwischen S und A. Also $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-6}{0-(-8)} = -\frac{1}{2}$

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt.

$f'(-8) = -3 \quad \rightarrow \quad \tan(\alpha) = -3 \quad \rightarrow \quad \alpha \approx -71,6°$, also etwa $71,6$ Grad.

Aufgabe 8 (10 BE)

Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts wurden unterschiedliche Kugelbahnkörper gefertigt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Zwei dieser Bahnkörper sind in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

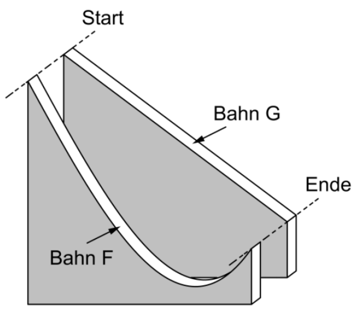

Abbildung 2: Kugelbahnkörper

Im Längsschnitt jeder der Bahnen F und G

- kann die Profillinie der Bahn modellhaft mithilfe einer Funktion beschrieben werden;
- wird der Startpunkt, von dem aus die Kugel die Bahn durchläuft, durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ dargestellt, der Endpunkt durch den Punkt $E\left(2 \mid \frac{1}{2}\right)$.

Der horizontale Untergrund, auf dem die beiden Bahnkörper stehen, wird jeweils durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Beschreibung der Profillinie der Bahn F erfolgt mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f(x) = \frac{3}{11}x^3 - \frac{81}{44}x + 2$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der tiefste Punkt der Bahn F unterhalb ihres Endpunktes liegt.

$f'(x) = \frac{9}{11}x^2 - \frac{81}{44} \qquad f''(x) = \frac{18}{11}x \qquad f'''(x) = \frac{18}{11}$

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = -1,5$ und $x_2 = 1,5$ x_1 entfällt, da es kleiner 0 ist.

$f''(1,5) \approx 2,45 > 0 \quad \rightarrow \quad$ bei $x_2 = 1,5$ liegt ein lokales Minimum vor.

$f(1,5) \approx 0,159 \quad \rightarrow \quad T(1,5 \mid 0,159)$ ist der tiefste Punkt der Bahn F.

b) Im fallenden Abschnitt der Bahn F gibt es einen Punkt, der auf der Höhe des Endpunkts liegt. Bestimmen Sie für diesen Punkt den Abstand vom Endpunkt.

Der fallende Abschnitt ist nach Aufgabe a) das Intervall $[0; 1,5]$

$\frac{1}{2} = f(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -2,94$ (entfällt), $x_2 \approx 0,9365$ und $x_3 = 2$ (entfällt)

Also ist der Punkt etwa $2 - 0,9365 = 1,0635$ m vom Endpunkt entfernt.

c) Bestimmen Sie die Lage desjenigen Punkts der Bahn F, in dem diese das größte Gefälle hat.

Gesucht ist also das Minimum des Anstiegs, also der 1. Ableitung $\rightarrow$ 2. Ableitung

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \qquad f'''(0) = \frac{18}{11} > 0$, also ist dies das Minimum der 2. Ableitung.

$f(0) = 2 \quad \rightarrow \quad$ Im Punkt $S(0 \mid 2)$ ist das größte Gefälle.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \leqq x \leqq 2$

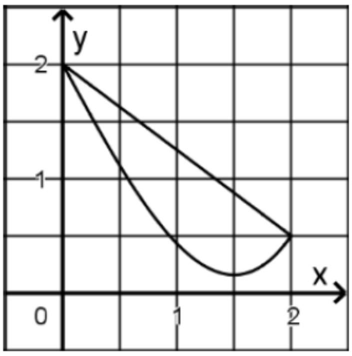

Abbildung 3: Lösung für d) und e)

Die Bahn G verläuft gerade. Die Beschreibung ihrer Profillinie erfolgt mithilfe einer Funktion g.

e) Zeichnen Sie den Graphen von g für $0 \leqq x \leqq 2$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe d) ein und zeigen Sie, dass $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ gilt.

Zeichnung siehe oben.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}5-2}{2-0} = -\frac{3}{4}$

$y = m \cdot x + n \quad \Rightarrow \quad 2 = -\frac{3}{4} \cdot 0 + n \quad \rightarrow \quad n = 2$

$\Rightarrow \quad g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$