Aufgaben zu Monotonie und lokalen Extrema (23.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(x)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 \mid f(0))$.

b) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Aufgabe 2 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph heißt G. Die Tangente an G im Punkt $P(1|f(1))$ heißt t, die Normale im selben Punkt heißt s.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung von t.

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck, welches durch t, s und die x-Achse gebildet ist, nicht gleichseitig ist.

Aufgabe 3 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 8$

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

d) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$

Aufgabe 4 ohne CAS (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ keine lokalen Extremstellen besitzen kann.

a) $f(x) = x^3 + 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$ c) $f(x) = e^x + 2$

Aufgabe 5 ohne CAS (3 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ und beziehen Sie in Ihre Argumentation auch die Verschiebung entlang der x- und der y-Achse mit ein.

$$f(x) = (x+1)^2 - 2$$

Aufgabe 6 ohne CAS (1+4 BE)

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.

b) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1.
Ermitteln Sie den Wert von k.

Aufgabe 7 (4 + 4 + 3 BE)

BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder wird auf horizontalem Untergrund eine 3m breite Sprungschanze installiert. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie für $x \in [-8; 0]$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{256}x^3 + \frac{3}{4}x + 2$ beschrieben werden. Abbildung 1 zeigt den zugehörigen Teil des Graphen von f.

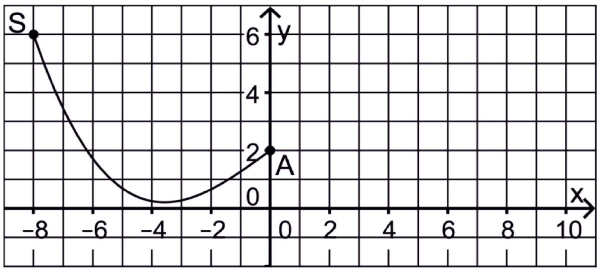

Abbildung 1: Sprungschanze

Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt $S\,(-8 \mid f(-8))$ dargestellt, der Absprungpunkt durch $A\,(0 \mid f(0))$. Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell den tiefsten Punkt der Schanze darstellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Höhendifferenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Schanze.

b) Veranschaulichen Sie in Abbildung 1 die mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt. Bestimmen Sie diese Steigung.

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt.

Aufgabe 8 (10 BE)

Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts wurden unterschiedliche Kugelbahnkörper gefertigt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Zwei dieser Bahnkörper sind in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

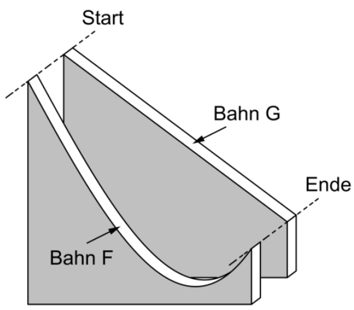

Abbildung 2: Kugelbahnkörper

Im Längsschnitt jeder der Bahnen F und G

- kann die Profillinie der Bahn modellhaft mithilfe einer Funktion beschrieben werden;
- wird der Startpunkt, von dem aus die Kugel die Bahn durchläuft, durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ dargestellt, der Endpunkt durch den Punkt $E\left(2 \mid \frac{1}{2}\right)$.

Der horizontale Untergrund, auf dem die beiden Bahnkörper stehen, wird jeweils durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Beschreibung der Profillinie der Bahn F erfolgt mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f(x) = \frac{3}{11}x^3 - \frac{81}{44}x + 2$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der tiefste Punkt der Bahn F unterhalb ihres Endpunktes liegt.

b) Im fallenden Abschnitt der Bahn F gibt es einen Punkt, der auf der Höhe des Endpunkts liegt. Bestimmen Sie für diesen Punkt den Abstand vom Endpunkt.

c) Bestimmen Sie die Lage desjenigen Punkts der Bahn F, in dem diese das größte Gefälle hat.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \leqq x \leqq 2$

Die Bahn G verläuft gerade. Die Beschreibung ihrer Profillinie erfolgt mithilfe einer Funktion g.

e) Zeichnen Sie den Graphen von g für $0 \leqq x \leqq 2$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe d) ein und zeigen Sie, dass $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ gilt.