Aufgaben zu Tangenten/Normalen (16.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 3x - 1) = x^5 + 3x^4 - x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = 20x^3 + 36x^2 - 6x$

b) $f(s) = t \cdot \sqrt{s} \cdot \cos(s)$

$f'(s) = t \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}} \cdot \cos(s) + \sqrt{s} \cdot (-\sin(s))\right) = t \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}} \cdot \cos(s) - \sqrt{s} \cdot \sin(s)\right)$

$$f''(s) = t \cdot \left(-\frac{1}{4\cdot\sqrt{s^3}} \cdot \cos(s) \underbrace{- \frac{1}{2\cdot\sqrt{s}} \cdot \sin(s) - \frac{1}{2\cdot\sqrt{s}} \cdot \sin(s)}_{=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}}\cdot\sin(s)} - \sqrt{s} \cdot \cos(s) \right)$$

$f''(s) = t \cdot \left(\left(-\frac{1}{4\cdot\sqrt{s^3}} - \sqrt{s}\right) \cdot \cos(s) - \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \sin(s)\right)$

c) $f(x) = (\sin(x) - 2x)^2$

$f'(x) = 2 \cdot (\sin(x) - 2x) \cdot (\cos(x) - 2)$

$f''(x) = 2 \cdot ((\cos(x) - 2) \cdot (\cos(x) - 2) + (\sin(x) - 2x) \cdot (-\sin(x)))$

$f''(x) = 2 \cdot \left((\cos(x) - 2)^2 - (\sin(x))^2 + 2x \cdot \sin(x)\right)$

d) $f(x) = a^x \cdot \cos(b^x)$

$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot \cos(b^x) + a^x \cdot \ln(b) \cdot b^x \cdot (-\sin(b^x)) = \ln(a) \cdot a^x \cdot \cos(b^x) - a^x \cdot \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x)$

$f'(x) = a^x \cdot (\ln(a) \cdot \cos(b^x) - \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x))$

$f''(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot (\ln(a) \cdot \cos(b^x) - \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x))$
$+a^x \cdot \left(-\ln(a) \cdot \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x) - (\ln(b))^2 \cdot b^x \cdot \sin(b^x) - (\ln(b))^2 \cdot b^x \cdot b^x \cdot \cos(b^x)\right)$

e) $f(x) = \cos(3 \cdot e^x - 2x)$

$f'(x) = (3 \cdot e^x - 2) \cdot (-\sin(3 \cdot e^x - 2x))$

$f''(x) = 3 \cdot e^x \cdot (-\sin(3 \cdot e^x - 2x)) + (3 \cdot e^x - 2)^2 \cdot (-\cos(3^x - 2x))$

f) $f(x) = e^{2x} \cdot (x^2 - 3x)$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot (x^2 - 3x) + e^{2x} \cdot (2x - 3) = e^{2x} \cdot (2x^2 - 4x - 3)$

$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot (2x^2 - 4x - 3) + e^{2x} \cdot (4x - 4) = e^{2x} \cdot (4x^2 - 4x - 10)$

Aufgabe 2 ohne CAS (1 + 4 + 2 + 2* BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2x$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f(x) = g'(x)$.

$g'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 = 3x + 2 = f(x)$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten und Normalen an $g(x)$ im Punkt $O\,(0|0)$.

$g'(x) = 3x + 2 \qquad g'(0) = 2 \quad$ also $m_T = 2$

$y = m \cdot x + n \quad$ Punkt $O\,(0|0)$ und $m_T = 2$ einsetzen: $0 = 2 \cdot 0 + n$ also $n = 0$

$t : y = 2x$

Der Anstieg der Normalen ist $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$

$y = m \cdot x + n \quad$ Punkt $O\,(0|0)$ und $m_N = -\frac{1}{2}$ einsetzen: $0 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + n$ also $n = 0$

$nor : y = -\frac{1}{2}x$

c) Weisen Sie nach, dass die Tangente an $g(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{3}$ parallel zu $f(x)$ ist.

$g'(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 3 \quad$ also ist der Anstieg der Tangente $m = 3$. Das ist parallel zu $f(x)$.

d*) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente aus Aufgabe c) an.
(Zum Vergleich: $t : y = 3x - \frac{1}{6}$)

Punkt berechnen: $g(\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad P\,(\frac{1}{3}|\frac{5}{6})$

Anstieg an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ berechnen: Aufgabe c) $\quad \rightarrow \quad m_T = 3$

Tangengleichung bestimmen: $y = m \cdot x + n \quad \rightarrow \quad \frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{1}{3} + n \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{6} = n$

$t : y = 3x - \frac{1}{6}$

Aufgabe 3 ohne CAS (8 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

$0 = -3x^2 + 12x - 9 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 3$

p-q-Formel anwenden führt zu: $\quad x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

b) Bestimmen Sie den Anstieg des Graphen an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

$f'(x) = -6x + 12 \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 9 \quad \rightarrow \quad m = 9$

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an der Stelle $x_0 = 1$.

Punkt bestimmen: $f(1) = -3 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 9 = 0$, also ist der Punkt $P(1|0)$

Anstieg der Normalen bestimmen: $m_T = f'(1) = 6 \quad \rightarrow \quad m_N = -\frac{1}{6}$

Normalengleichung aufstellen: $y = m \cdot x + n \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{6} \cdot 1 + n \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \text{nor} : y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$

d) Begründen Sie, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ zwar eine Tangente, allerdings keine Normale besitzt.

$f'(2) = 0 = m_T \quad \rightarrow \quad m_N = -\frac{1}{0}$ ist nicht definiert, deshalb existiert an der Stelle zwar eine Tangente mit Anstieg 0, aber keine Normale.

Aufgabe 4 ohne CAS (4 + 2 BE)

Gegeben sind der Graph G_h der gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{4}{x^2}$ und der Punkt $B\,(2|h(2))$.
Die Tangente t an G_h im Punkt B schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung, durch welche die Tangente t beschrieben werden kann.

Koordinaten von Punkt B berechnen: $h(2) = \frac{4}{2^2} = 1$, also ist $B(2|1)$

Anstieg bestimmen: $h'(x) = -\frac{8}{x^3} \quad \rightarrow \quad h'(2) = -\frac{8}{2^3} = -1 = m_T$

Tangentengleichung ermitteln: $y = m \cdot x + n \quad \rightarrow \quad 1 = -1 \cdot 2 + n \quad \rightarrow \quad n = 3$

$\Rightarrow t : y = -x + 3$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Das Dreieck ist rechtwinklig. Die Höhe und Länge ist durch die Koordinatenschnittpunkte bestimmt, also müssen diese bestimmt werden, um sie dann in die Formel $A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ einzusetzen.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $t(0) = 3$

$\rightarrow \quad S_y(0|3)$, also hat das Dreieck eine Höhe von 3 LE.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $0 = -x + 3 \quad \rightarrow \quad x = 3$

$\rightarrow \quad S_x(3|0)$, also hat das Dreieck eine Länge von 3 LE.

$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ LE} \cdot 3 \text{ LE} = \frac{9}{2} \text{ FE} = 4{,}5 \text{ FE}.$

Aufgabe 5 ohne CAS (12 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (x+2)^2 - 9$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die gegebenen Punkte.

a) $A(1|2)$ und $B(3|-10)$

$m = \frac{-10-2}{3-1} = -6$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 2 = -6 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 8$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -6x + 8}}$

b) $C\,(2|f(2))$ und $D(0|1)$

$f(2) = (2+2)^2 - 9 = 7 \Rightarrow C(2|7)$

$m = \frac{7-1}{2-0} = 3$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 7 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 3x + 1}}$

c) $E\,(-1|f(-1))$ und $F\,(0|f(0))$

$f(-1) = (-1+2)^2 - 9 = -8 \Rightarrow E(-1|-8)$

$f(0) = (0+2)^2 - 9 = -5 \Rightarrow F(0|-5)$

$m = \frac{-5+8}{0+1} = 3$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow -5 = 3 \cdot 0 + n \Rightarrow n = -5$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 3x - 5}}$

d) $G\,(-5|f(-5))$ und $H\,(-4|f(-4))$

$f(-5) = (-5+2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow G(-5|0)$

$f(-4) = (-4+2)^2 - 9 = -5 \Rightarrow H(-4|-5)$

$m = \frac{-5-0}{-4+5} = -5$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 0 = -5 \cdot (-5) + n \Rightarrow n = -25$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -5x - 25}}$

Aufgabe 6 a) bis d) ohne CAS (15 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto -x^2 + 5x - 2$. $\rightarrow$ $g'(x) = -2x + 5$

Bestimmen Sie die Geraden- bzw. Tangentengleichungen für die gegebenen Eigenschaften.

a) Die Gerade g_1 hat einen Anstieg $m = -2$ und verläuft durch den Punkt $P_1(3|2)$.

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 8$ $g_1(x) = -2x + 8$

b) Die Gerade g_2 verläuft durch den Punkt $P_2\,(3|g(3))$ und ist parallel zu $y = 4x - 2$.

$m = 4; P_2(3|4)$ $y = m \cdot x + n \Rightarrow 4 = 4 \cdot 3 + n \Rightarrow n = -8$ $g_2(x) = 4x - 8$

c) Die Tangente g_3 berührt an der Stelle $x = 3$ den Funktionsgraphen.

$g'(3) = -1 = m; P(3|-4)$ $y = m \cdot x + n \Rightarrow -4 = -1 \cdot 3 + n \Rightarrow n = -1$ $g_3(x) = -x - 1$

d) Die Tangente g_4 berührt an der Stelle $x = 1$ den Funktionsgraphen.

$g'(1) = 3 = m; P(1|2)$ $y = m \cdot x + n \Rightarrow 2 = 3 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1$ $g_4(x) = 3x - 1$

e) Die Gerade g_5 hat einen Anstiegswinkel $\alpha = 30°$ und verläuft durch den Punkt $P_3\,(0|g(0))$

$m = \tan(\alpha) = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$ $P_3(0|-2)$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow -2 = 0,577 \cdot 0 + n \Rightarrow n = -2$

$g_4(x) = 0,577x - 2$ bzw. exakt: $g_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

Aufgabe 7 ohne CAS (9 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto -3x^2 + 12x - 9$.
Berechnen Sie die Stelle, an welcher die Tangente den gegebenen Anstieg besitzt. Geben Sie anschließend die Tangentengleichung an.

a) $m = 12$

$12 = -6x + 12 \Rightarrow x = 0$ $h(0) = -9 \Rightarrow P(0|-9)$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow -9 = 12 \cdot 0 + n \Rightarrow n = -9$

$t : \underline{\underline{y = 12x - 9}}$

b) $m = -6$ Analoger Rechenweg, wie a) $\Rightarrow x = 3$ und $t : \underline{\underline{y = -6x + 18}}$

c) $m = 0$ Analoger Rechenweg, wie a) $\Rightarrow x = 2$ und $t : \underline{\underline{y = 3}}$

Aufgabe 8 (2 + 2 + 2 + 3 BE + 2 Zusatzpunkte)

Die Helpter Berge sind die höchste natürliche Erhebung in unserem Bundesland. Wenn das Profil des Berges extrem stark vereinfacht wird, kann es mit folgender Funktion $h(x)$ beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{288.000}x^3 + \frac{307}{180.000}x^2 - \frac{103}{1.200}x + 145, \qquad 0 \leqq x \leqq 450$$

Dabei gibt x die Entfernung in m an und y die Erhöhung über Normalhöhennull (NHN) in m.

a) Geben Sie die Höhe zu Beginn und zum Ende des Bergprofils an.

(Vergleich: Woldegk liegt ca. 112 m über NHN; Friedland liegt ca. 16 m über NHN; Neubrandenburg Innenstadt liegt ca. 20 m über NHN und der Datzeberg ca. 57 m über NHN)[1]

$h(0) = 145$ und $h(450) \approx 135,34$
Der Berg ist zu Beginn 145 m über NHN und am Ende ca. 135,34 m über NHN.

b) Bestimmen Sie, wie weit es von Beginn der Berge bis zum Höchsten Punkt auf einer Höhe von 179 m über NHN ist.

$179 = h(x) \quad \to \quad x_1 = -108,8$ liegt außerhalb des Intervalls und $x_2 = 300$
Nach 300 m ist der höchste Punkt von 179 m erreicht.

c) Bestimmen Sie den mittleren Anstieg der Berge im Intervall $[0; x_{\mathrm{HP}}]$ und im Intervall $[x_{\mathrm{HP}}; 450]$. Geben Sie anschließen die Anstiegswinkel an.

(Hinweis: x_{HP} ist der x-Wert des Hochpunktes, welcher in Aufgabe b) ermittelt wurde.)

Mittlerer Anstieg für $[0; 300]: \frac{179-145}{300-0} \approx 0,113$

Der Anstiegswinkel ist dann $\alpha = \tan^{-1}(0,113) \approx 6,4°$

Mittlerer Anstieg für $[300; 450]: \frac{135{,}34-179}{450-300} \approx -0,291$

Der Anstiegswinkel ist dann $\alpha = \tan^{-1}(-0,291) \approx -16,2°$, also ist der Winkel des Abstiegs $16,2°$

d) Zu Beginn und zum Ende des Berges soll eine Straße anschließen, welche geradlinig verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für eine der beiden Straßen.

$h'(x) = -\frac{1}{96.000}x^2 + \frac{307}{90.000}x - \frac{103}{1.200}$

Lösung 1 für $x = 0$:

$h'(0) = -\frac{103}{1.200}$ in die Gleichung $y = mx + n$ Werte einsetzen, um n zu bestimmen:

$145 = \frac{103}{1.200} \cdot 0 + n \quad \to \quad n = 145 \quad \to \quad t : y = -\frac{103}{1.200}x + 145$

Lösung 2 für $x = 450$:

$h'(450) = -\frac{3.169}{4.800}$ in die Gleichung $y = mx + n$ Werte einsetzen, um n zu bestimmen:

$135,34 = \frac{3.169}{4.800} \cdot 450 + n \quad \to \quad n \approx 432,434 \quad \to \quad t : y = -\frac{3.169}{4.800}x + 432,434$

e*) Beurteilen Sie, warum der Funktionsgraph extrem stark vereinfacht ist.

- keine Hügel zwischendurch
- Längen gerundet und teilweise viel zu kurz (der ganze Berg ist 450 m lang)
- ...

[1] Daten ermittelt durch `https://www.mapcoordinates.net/de`.