

Aufgaben zu Tangenten/Normalen (16.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der gegebenen Funktionen.

- $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 3x - 1)$
- $f(s) = t \cdot \sqrt{s} \cdot \cos(s)$
- $f(x) = (\sin(x) - 2x)^2$
- $f(x) = a^x \cdot \cos(b^x)$
- $f(x) = \cos(3 \cdot e^x - 2x)$
- $f(x) = e^{2x} \cdot (x^2 - 3x)$

Aufgabe 2 ohne CAS (1 + 4 + 2 + 2* BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2x$.

- Zeigen Sie, dass gilt: $f(x) = g'(x)$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten und Normalen an $g(x)$ im Punkt $O(0|0)$.
- Weisen Sie nach, dass die Tangente an $g(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{3}$ parallel zu $f(x)$ ist.
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente aus Aufgabe c).
(Zum Vergleich: $t : y = 3x - \frac{1}{6}$)

Aufgabe 3 ohne CAS (8 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$ mit $x \in \mathbb{R}$.

- Berechnen Sie die Nullstellen von f .
- Bestimmen Sie den Anstieg des Graphen an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an der Stelle $x_0 = 1$.
- Begründen Sie, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ zwar eine Tangente, allerdings keine Normale besitzt.

Aufgabe 4 ohne CAS (4 + 2 BE)

Gegeben sind der Graph G_h der gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{4}{x^2}$ und der Punkt $B(2|h(2))$.

Die Tangente t an G_h im Punkt B schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

- Ermitteln Sie eine Gleichung, durch welche die Tangente t beschrieben werden kann.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 5 ohne CAS (12 BE)

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto (x + 2)^2 - 9$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die gegebenen Punkte.

- a) $A(1|2)$ und $B(3|-10)$
- b) $C(2|f(2))$ und $D(0|1)$
- c) $E(-1|f(-1))$ und $F(0|f(0))$
- d) $G(-5|f(-5))$ und $H(-4|f(-4))$

Aufgabe 6 a) bis d) ohne CAS (15 BE)

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $g : x \mapsto -x^2 + 5x - 2$.

Bestimmen Sie die Geraden- bzw. Tangentengleichungen für die gegebenen Eigenschaften.

- a) Die Gerade g_1 hat einen Anstieg $m = -2$ und verläuft durch den Punkt $P_1(3|2)$.
- b) Die Gerade g_2 verläuft durch den Punkt $P_2(3|g(3))$ und ist parallel zu $y = 4x - 2$.
- c) Die Tangente g_3 berührt an der Stelle $x = 3$ den Funktionsgraphen.
- d) Die Tangente g_4 berührt an der Stelle $x = 1$ den Funktionsgraphen.
- e) Die Gerade g_5 hat einen Anstiegswinkel $\alpha = 30^\circ$ und verläuft durch den Punkt $P_3(0|g(0))$

Aufgabe 7 ohne CAS (9 BE)

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $h : x \mapsto -3x^2 + 12x - 9$.

Berechnen Sie die Stelle, an welcher die Tangente den gegebenen Anstieg besitzt. Geben Sie anschließend die Tangentengleichung an.

- a) $m = 12$
- b) $m = -6$
- c) $m = 0$

Aufgabe 8 (2 + 2 + 2 + 3 BE + 2 Zusatzpunkte)

Die Helpter Berge sind die höchste natürliche Erhebung in unserem Bundesland. Wenn das Profil des Berges extrem stark vereinfacht wird, kann es mit folgender Funktion $h(x)$ beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{288.000}x^3 + \frac{307}{180.000}x^2 - \frac{103}{1.200}x + 145, \quad 0 \leq x \leq 450$$

Dabei gibt x die Entfernung in m an und y die Erhöhung über Normalhöhennull (NHN) in m.

- a) Geben Sie die Höhe zu Beginn und zum Ende des Bergprofils an.
(Vergleich: Woldegk liegt ca. 112 m über NHN; Friedland liegt ca. 16 m über NHN; Neubrandenburg Innenstadt liegt ca. 20 m über NHN und der Datzeberg ca. 57 m über NHN)¹
- b) Bestimmen Sie, wie weit es von Beginn der Berge bis zum Höchsten Punkt auf einer Höhe von 179 m über NHN ist.
- c) Bestimmen Sie den mittleren Anstieg der Berge im Intervall $[0; x_{\text{HP}}]$ und im Intervall $[x_{\text{HP}}; 450]$. Geben Sie anschließend die Anstiegswinkel an.
(Hinweis: x_{HP} ist der x-Wert des Hochpunktes, welcher in Aufgabe b) ermittelt wurde.)
- d) Zu Beginn und zum Ende des Berges soll eine Straße anschließen, welche geradlinig verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für eine der beiden Straßen.
- e*) Beurteilen Sie, warum der Funktionsgraph extrem stark vereinfacht ist.

¹Daten ermittelt durch <https://www.mapcoordinates.net/de>.