Aufgaben zur Ableitung (09.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (10 BE)

Leiten Sie folgende Funktionen nach x ab.

- $a(x) = 4x^5$ $a'(x) = 20x^4$
- $b(x) = x^{19}$ $b'(x) = 19x^{18}$
- $c(x) = x^{3,4}$ $c'(x) = 3,4x^{2,4}$
- $d(x) = 4x^3 - 7x^2$ $d'(x) = 12x^2 - 14x$
- $e(x) = \frac{5}{x}$ $e'(x) = -5x^{-2} = -\frac{5}{x^2}$
- $f(x) = \frac{4}{x^3}$ $f'(x) = -12x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$
- $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$ $g'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$
- $h(x) = \sqrt[7]{x}$ $h'(x) = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7 \cdot \sqrt[7]{x^6}}$
- $i(x) = 6x^2 + 9x - \pi$ $i'(x) = 12x + 9$
- $j(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{4}{25}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 3x + 3t$ $j'(x) = 3x^5 - \frac{4}{5}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - 3$

Ich habe bei einigen die Notation $a(x) = 4x^5 = 20x^4$ gesehen. Das ist falsch.
Bitte $a(x)$ und $a'(x)$ als zwei einzelne Funktionen aufschreiben.

Wer schreibt, der bleibt!

Aufgabe 2 ohne CAS (14 BE)

Bestimmen Sie die Ableitungen:

a) $\frac{d}{dx}(5x^4 - 3x^2 + 8x - 5,673) = 20x^3 - 6x + 8$

b) $\frac{d}{dt}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) = 20x^3t^3 - 3x^2 + 12xt$

c) $\frac{d}{dx}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) = 15x^2t^4 - 6xt + 6xt^2$

d) $\frac{d}{da}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) = 7$

e) $\frac{d}{dx}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) = 6xt^2a^4 - 8x^3t^{10}a^3$

f) $\frac{d}{dt}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) = 6x^2ta^4 - 20x^4t^9a^3$

g) $\frac{d}{da}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) = 12x^2t^2a^3 - 6x^4t^{10}a^2$

Aufgabe 3 ohne CAS (1 + 2 + 4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = x^2 + 4x$.

a) Geben Sie $f'(x)$ und $g'(x)$ an. $f'(x) = 3$ und $g'(x) = 2x + 4$

b) Bestimmen Sie jeweils den Anstieg von $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 5$

$f'(5) = 3$ und $g'(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14$

c) Berechnen Sie jeweils die Anstiege von $f(x)$ und $g(x)$ an ihren Schnittstellen.

Schnittstellen berechnen:

$f(x) = g(x)$ also $3x + 2 = x^2 + 4x$ umformen liefert: $0 = x^2 + x - 2$

Aus der p-q-Formel folgt: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

Anstiege an den Stellen:

Stelle $x_1 = -2$: $f'(-2) = 3$ und $g'(-2) = 0$

Stelle $x_2 = 1$: $f'(1) = 3$ und $g'(1) = 6$

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 1 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - 3x - 18$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x)$.
$0 = 3x^2 - 3x - 18$ (durch 3 geteilt für Normalform) $0 = x^2 - x - 6$

Aus der p-q-Formel folgt: $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

b) Geben Sie $f'(x)$ an. $f'(x) = 6x - 3$

c) Bestimmen Sie jeweils den Anstieg an den Stellen $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 2$ und $x_5 = 5$.

$f'(-5) = -33$ $f'(-1) = -9$ $f'(0) = -3$ $f'(0,5) = 0$ $f'(2) = 9$ $f'(5) = 27$

d) Berechnen Sie die Stelle x_0, an welcher der Anstieg $m = 15$ ist.

$15 = 6x - 3$ umformen liefert: $18 = 6x$ $\Rightarrow$ $x = 3$

An der Stelle $x = 3$ hat die Funktion $f(x)$ den Anstieg $m = 15$.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 + 2 + 3 BE)

Astrid Kumbernuss (*05.02.1970 in Grevesmühlen) hat ihre Kugel 1995 in Göteborg auf folgender Wurfparabel gestoßen:

$$k(x) = -\frac{51645}{1125721}x^2 + \frac{9}{10}x + 1,56$$

Dabei sind x und y jeweils in Meter gegeben.

a) Begründen Sie, dass Astrid Kumbernuss 186 cm groß ist unter der Annahme, dass eine Kugel auf Schulterhöhe (etwa 30 cm unter der Körpergröße) abgestoßen wird.

Dafür betrachtet man die Höhe der Kugel beim Abstoß: $f(0) = 1,56$ also 1,56 m Abstoßhöhe. Werden dazu 30 cm addiert, ergibt sich eine Körpergröße von 1,86 m bzw. 186 cm.

b) Der Weltrekord für Frauen im Kugelstoßen liegt bei 22,63 m (Natalja Lissowskaja, 1987). Weisen Sie nach, dass Astrid Kumbernuss lediglich 1,41 m weniger geworfen hat.

Gesucht ist die Stelle, wo die Kugel den Boden berührt, das ist die Nullstelle.

$0 = -0,05x^2 + 0,9733x + 1,86$

$\Rightarrow x_1 \approx -1,60$ entfällt, da dies rückwärts Werfen bedeutet und $x_2 = 21,22$

$21,22$ m ist $1,41$ m von $22,63$ m entfernt.

c) Bestimmen Sie, nach wie vielen Metern, die Kugel über 2,10 m hoch flog.

$2,1 = k(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0,62$ und $x_2 \approx 19,00$.

Also nach 0,62 m ist die Kugel über 2,1 m hoch.

d) Begründen Sie, dass nach ca. 9,809 m die Kugel fällt.

Bei 9,809 ist der Scheitelpunkt der Parabel, dies kann man daran erkennen, dass an der Stelle $x = 9,809$ der Anstiegfast 0 ist, also $f'(9,809) \approx 0$.
Danach sind alle Anstiege negativ. Deshalb fällt die Kugel nach 9,809 m.

e) Berechnen Sie den Anstiegswinkel, mit welchem sie die Kugel abgestoßen hat. (Hilfe: $m = \tan\alpha$)

$f'(0) = 0,9$ in die Formel $m = \tan\alpha$ eingesetzt folgt: $0,9 = \tan\alpha$

$\alpha = \tan^{-1}(0,9)$ also $\alpha \approx 42,0°$

Aufgabe 6 ohne CAS (3 BE)

Ein voll beladener LKW fährt die ersten 20 s an mit einer Funktion $s(t) = \frac{0,9}{2} \cdot t^2$.

Berechnen Sie mithilfe von $s'(t)$ seine Momentangeschwindigkeit nach 5 s, 10 s und 20 s.

$s'(t) = 2 \cdot \frac{0,9}{2} \cdot t = 0,9t \qquad s'(5) = 4,5\frac{m}{s}, \quad s'(10) = 9\frac{m}{s}$ und $s'(20) = 18\frac{m}{s}$.

Aufgabe 7 ohne CAS (14 BE)

Geben Sie das Verhalten im Unendlichen für die vorgegebenen Funktionen an.

$f(x) = -13x + 5x^4 - 12x^2 \qquad g(x) = 150x^4 - 0,2x^6 \qquad h(x) = 7x^2 + x^{15} - x^{14}$

$k(x) = -\pi \cdot x^5 + \sqrt{2} \cdot x^4 \qquad l(x) = e^x \qquad m(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad n(x) = e^{-x}$

Funktion	$\lim\limits_{x\to-\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}$
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$
$g(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$
$h(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = +\infty$	/
$k(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} k(x) = -\infty$	/
$l(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} l(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} l(x) = +\infty$	/
$m(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} m(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} m(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} m(x) = 1$
$n(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} n(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} n(x) = 0$	/