Aufgaben zur Stetigkeit und mittleren/lokalen Änderungsrate (30.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & , \text{ für } x < 3 \\ \frac{1}{2} & , \text{ für } x \geqq 3 \end{cases}$ an der Stelle $x_1 = 3$ unstetig ist.

$f(3) = \frac{1}{2}$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \frac{5}{2}$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \frac{1}{2}$ links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\to \lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existiert nicht $\to f(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 3$ unstetig.

Aufgabe 2 (6 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktionen an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig sind:

a) $g_1(x) = \begin{cases} 2x + 7 & , \text{ für } x < 0 \\ x - 1 & , \text{ für } x \geqq 0 \end{cases}$

$g_1(0) = -1$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g_1(x) = 7$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_1(x) = -1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\to \lim\limits_{x \to 0} g_1(x)$ existiert nicht $\to g_1(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig.

b) $g_2(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & , \text{ für } x \leqq 0 \\ 2x + 1 & , \text{ für } x > 0 \end{cases}$

$g_2(0) = -3$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g_2(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_2(x) = 1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\to \lim\limits_{x \to 0} g_2(x)$ existiert nicht $\to g_2(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig.

c) $g_3(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } x > 0 \\ 0 & , \text{ für } x = 0 \\ -1 & , \text{ für } x < 0 \end{cases}$

$g_3(0) = 0$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g_3(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_3(x) = 1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\to \lim\limits_{x \to 0} g_3(x)$ existiert nicht $\to g_3(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig.

Aufgabe 3 (3 + 2 BE)

Bei einer Sonnenblume wird an verschiedenen Tagen die Höhe gemessen:

Zeit (in Tagen)	0	20	24	30	39	50	75
Höhe (in cm)	2	20	39	64	105	156	192

a) Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion $f(t) = h$ mit t ist die Zeit in Tagen und h die Höhe in cm.
Grafische Darstellung sehr aufwändig in diesem Programm.

b) Begründen Sie anhand dieser Darstellung, in welchem Zeitraum die Sonnenblume am stärksten und am schwächsten gewachsen ist.
Der Anstieg im Intervall [0;20] ist am schwächsten, deshalb wächst die Sonnenblume in diesem Zeitraum am schwächsten.
Der Anstieg im Intervall [20;24] ist am stärksten, deshalb wächst die Sonnenblume in diesem Zeitraum am stärksten.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 BE)

Die Stadt Friedland hat folgende Einwohnerzahlen[1] verzeichnet:

Jahr	1925	1989	2000	2006	2008	2011	2015	2017	2018
Einwohner	7.522	8.800	7.486	7.251	6.768	6.428	6.779	6.646	6.354

Begründen Sie mithilfe der mittleren Änderungsrate, in welchem Zeitraum

a) die Bevölkerungsentwicklung den stärksten Anstieg hat.

$[1925 : 1989] \approx 19,97$ $[1989 : 2000] \approx -119,45$ $[2000 : 2006] \approx -39,17$
$[2006 : 2008] = -241,5$ $[2008 : 2011] \approx -113,33$ $[2011 : 2015] = 87,75$
$[2015 : 2017] = -66,5$ $[2017 : 2018] = -292$

Der stärkste Anstieg ist im Zeitraum 2011 bis 2015.

b) die Bevölkerungsentwicklung den stärksten Rückgang hat.
Der stärkste Rückgang ist im Zeitraum 2017 bis 2018.

c) sich die Bevölkerungsentwicklung am stärksten verändert hat.
Die Bevölkerung hat sich am stärksten im Zeitraum von 2017 bis 2018 verändert.

Aufgabe 5 (2 + 6 + 6 BE)

Die astronomische Sonnenscheindauer ist die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang in einer Region. Für Friedland (Breitengrad: 53°40‘ und Längengrad: 13°33‘) kann die astronomische Sonnenscheindauer für das Jahr 2019 durch die folgende Sinusfunktion angenähert werden[2]:

$$f(x) = y = \frac{289}{60} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)\right) + 12.25$$

Dabei wird x in Tagen angegeben und y in Stunden.

a) Erläutern Sie, was eine positive mittlere Änderungsrate bzw. eine negative mittlere Änderungsrate der astronomischen Sonnenscheindauer bedeuten.

Eine positive Änderungsrate bedeutet, dass die Sonnenscheindauer sich erhöht (die Tage

[1] Quelle: `https://www.laiv-mv.de/static/LAIV/Statistik/Dateien/Publikationen/A\%20I\%20Bev\%C3\%B6lkerungsstand/A\%20113/A113\%202018\%2000.pdf`

[2] Unter Verwendung von: `https://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.php`

werden länger).
Eine negative Änderungsrate bedeutet, dass die Sonnenscheindauer sinkt (die Tage werden kürzer).

b) Füllen Sie eine Wertetabelle für den 1. und 15. Tag jedes Monats aus.
(Beispiel: Der 01.06.2019 ist der 152. Tag, also $x = 152$ und $f(152) \approx 16,8$)

Datum 2019 x	01.01. 1	15.01. 15	01.02. 32	15.02. 46	01.03. 60	15.03. 74	01.04. 91	15.04. 105
Sonnenscheindauer in h	7,54	7,92	8,71	9,59	10,62	11,75	13,16	14,26
Datum 2019 x	01.05. 121	15.05. 135	01.06. 152	15.06. 166	01.07. 182	15.07. 196	01.08. 213	15.08. 227
Sonnenscheindauer in h	15,37	16,16	16,80	17,05	16,98	16,64	15,88	15,01
Datum 2019 x	01.09. 244	15.09. 258	01.10. 274	15.10. 288	01.11. 305	15.11. 319	01.12. 335	15.12. 349
Sonnenscheindauer in h	13,76	12,62	11,30	10,20	9,03	8,27	7,68	7,45

c) Bestimmen Sie fünf verschiedene mittlere Änderungsraten im Intervall [1;171] und fünf verschiedene mittlere Änderungsraten im Intervall [171;365]. Begründen Sie, mithilfe Ihrer Ergebnisse, warum die Tage vor dem 171. Tag des Jahres (20.06.2019) länger werden und danach kürzer.

Alle mittleren Änderungsraten im Intervall [1;171] sind positiv, egal welche Teilintervalle gewählt werden. Daher werden die Tage in diesen Intervallen stets länger.
Alle mittleren Änderungsraten im Intervall [171;365] sind negativ, egal welche Teilintervalle gewählt werden. Daher werden die Tage in diesen Intervallen stets kürzer.

Aufgabe 6 (5 BE)

Gute oder schlechte Nachrichten? Nehmen Sie Stellung.

a) „Der Anstieg der Inflationsrate verringert sich.“
Das ist zwar grundsätzlich gut, allerdings gibt es noch eine Inflationsrate, auch wenn sie kleiner geworden ist.

b) „Die Zuwachsraten sinken.“
Das ist nicht ganz gut, allerdings gibt es noch Zuwachsraten, auch wenn sie gesunken sind.

c) „Der Aufschwung erlahmt.“
Es gibt noch einen Aufschwung, dieser ist jedoch kleiner geworden. Es ist gut, dass es noch einen Aufschwung gibt, schlecht, dass er gesunken ist.

d) „Die Talfahrt ist gebremst.“
Damit ist sie jedoch nicht ausgebremst, sondern es gibt noch eine Talfahrt. Gut für die Sicherheit, schlecht für das Fahrerlebnis.

e) „Die Neuverschuldungen sinken.“
Damit sind die Neuverschuldungen zurück gegangen, allerdings gibt es noch Neuverschuldungen, was weiterhin negativ ist.

Aufgabe 7 (3 BE)

Ein voll beladener LKW fährt die ersten 20 s an mit einer Funktion $s(t) = \frac{0{,}9}{2} \cdot t^2$. Berechnen Sie mithilfe des Differentialquotienten seine Momentangeschwindigkeit nach 5 s, 10 s und 20 s.

$s'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 4,5\ \dfrac{m}{s}$

$s'(10) = \lim\limits_{x \to 10} \dfrac{s(t) - s(10)}{t - 10} = 9\ \dfrac{m}{s}$

$s'(20) = \lim\limits_{x \to 20} \dfrac{s(t) - s(20)}{t - 20} = 18\ \dfrac{m}{s}$

Zusatz (3 BE)

Beweisen Sie diese Folgerung aus dem Zwischenwertsatz und dem Nullstellensatz:

Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass gilt:

$$f(c) = g(c)$$

Der Satz gilt auch für $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$.

Diese Aussage kann immer genutzt werden, um die Existenz von Schnittpunkten zu behaupten.

Um diese Aussage zu beweisen, definiert man sich die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

(oder $h(x) = g(x) - f(x)$ für den zweiten Fall des Satzes).
Dann gilt:

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \text{ und } h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

Bzw.

$$h(a) < 0 \text{ und } h(b) > 0$$

Nun folgt nach Nullstellensatz, dass es ein $c \in (a, b)$ geben muss, für welches gilt:

$$h(c) = 0$$

Also:

$$f(c) - g(c) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c) = g(c)$$

□