Aufgaben zu Grenzwerte von Funktionen (18.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Geben Sie die folgenden Grenzwerte an.

$(a) \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{1-x} = -2$ $\quad (b) \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3} = 0$ $\quad (c) \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2+5}{x+1}$ existiert nicht

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$. Geben Sie folgende Grenzwerte an:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 1$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = -1$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) =$ existiert nicht
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x) = 0$

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2-9}{(x-2)(x+3)}$.

1. Geben Sie den Definitionsbereich sowie die Achsenschnittpunkte der Funktion an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken.

   $D: x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq -3$; $\quad S_x(3|0)$ und $S_y(0|\frac{3}{2})$; $\quad$ Polstelle bei $x = 2$, Lücke bei $x = -3$

2. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 \quad \to \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

3. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mindestens im Intervall von $-5 \leqq x \leqq 6$ in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Asymptoten und die (hebbare) Lücke.

   Lösung auf der letzten Seite.

Aufgabe 4 (6 BE)

Geben Sie zwei möglichst einfache Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ mit den gegebenen Eigenschaften an:

1. Die Funktion hat die waagerechte Asymptote $y = 3$ und eine Polstelle bei $x_0 = -2$.

   $f_1(x) = \frac{1}{x+2} + 3 \qquad f_2(x) = \frac{3x}{x+2}$

2. Die Funktion besitzt eine (hebbare) Lücke an der Stelle $x_1 = -3$.

   $f_1(x) = \frac{x+3}{x+3}$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{x\cdot(x+3)}{x+3}$

3. Die Funktion nähert sich für $x \to \pm\infty$ der waagerechten Asymptote $y = -1$ an und hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   $f_1(x) = \frac{1}{x} - 1$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

Aufgabe 5 (4 BE)

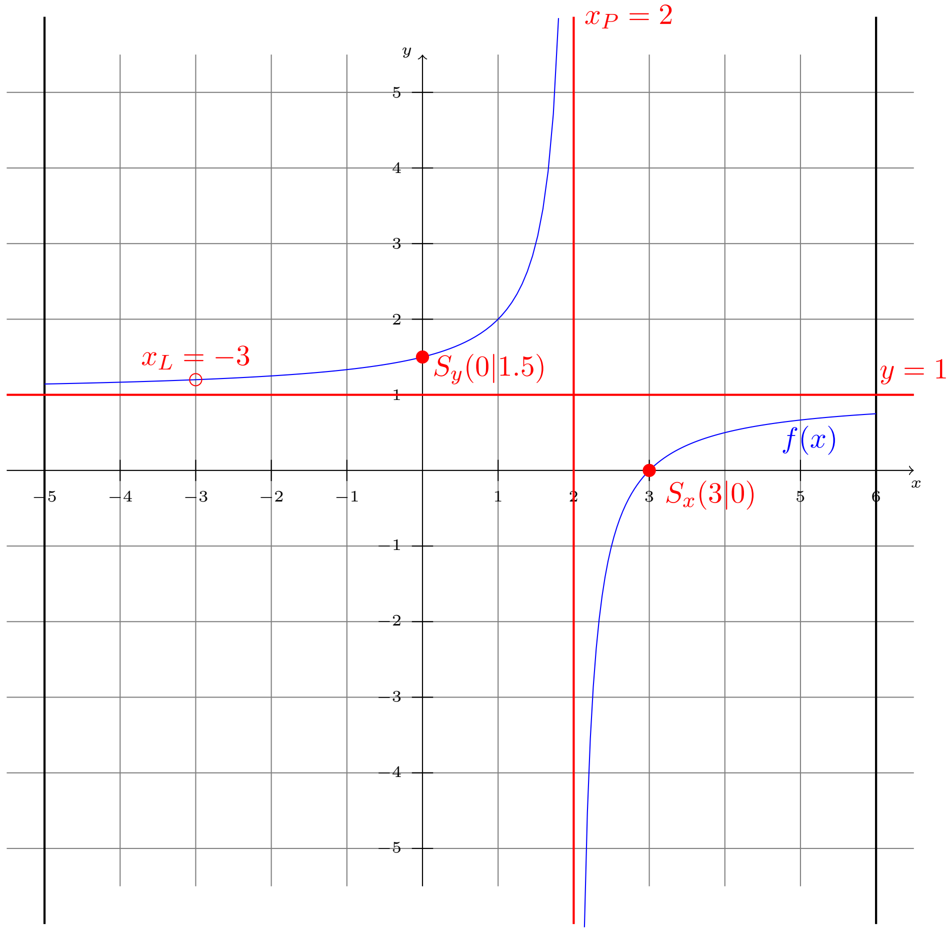
Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen der gegebenen Funktionen.

(a) $h_1(x) = x^3 - 2x^2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} h_1 f(x) = \infty$

(b) $h_2(x) = e^{-x^3+2021}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) = \infty, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} h_2(x) = 1$

(c) $h_3(x) = \cos\left(\frac{2021}{x}\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_3(x) = 1, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} h_3(x) = 1 \quad \to \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} h_3(x) = 1$

(d) $h_4(x) = e^{\frac{1}{2x}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_4(x) = 1, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} h_4(x) = 1 \quad \to \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} h_4(x) = 1$



$x_P = 2$
$x_L = -3$
$S_y(0|1.5)$
$y = 1$
$f(x)$
$S_x(3|0)$
x
y