Aufgaben zu Funktionentypen und Zahlenfolgen (12.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{e^x}$
In der Wurzel dürfen nur Werte $x \geqq 0$ stehen, ansonsten ist sie im reellen nicht definiert. Die Frage ist also, wann ist $e^x \geqq 0$?
Da e^x grundsätzlich positiv ist, bereitet es also keine Probleme. Daher ist $D = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$
Hier ist es ähnlich wie in Aufgabe a). Die Frage ist jetzt, aber, wann ist $\sin(x) \geqq 0$?
Hier lohnt es sich einmal einen Blick auf das Grafikmenü des CAS zu werfen, um die Lösung besser zu verstehen. Aber der Solve-Befehl des CAS liefert die folgende Lösung in mathematischer Notation: $2 \cdot k \cdot \pi \leqq x \leqq 2 \cdot k \cdot \pi + \pi; k \in \mathbb{Z}$. Also ist $D = [2k\pi; 2k\pi + \pi]$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Der Definitionsbereich also besteht aus mehreren Teilintervallen.

c) $h(x) = \ln(\sin(x))$
Diese Aufgabe ist ähnlich wie Aufgabe b) mit dem einzigen Unterschied, dass der natürliche Logarithmus gebildet wird und nicht die Wurzel. Der Unterschied zwischen Logarithmen und Wurzeln ist, dass Logarithmen nur für positive Werte definiert sind (während bei Wurzeln auch die Gleichheit mit der Null zugelassen ist). Also muss die Gleichung $\sin(x) > 0$ gelöst werden und der Definitionsbereich ist ähnlich zu b): $D = (2k\pi; 2k\pi + \pi)$.

Aufgabe 2 (4 BE)

Verschieben Sie den Funktionsgraphen der gegebenen Funktionen

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$; 4 LE $\rightarrow$ 2 LE $\downarrow$
Zu bilden ist: $f(x-4) - 2 = 2 \cdot (x-4)^2 - 4 \cdot (x-4) + 5 - 4 = 2x^2 - 20x + 49$

b) $g(x) = e^{4x-7} - 2$; 2 LE $\leftarrow$ 3 LE $\uparrow$
Zu bilden ist: $g(x+2) + 3 = e^{4 \cdot (x+2) - 7} - 2 + 3 = e^{4x+1} + 1$

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(1|3)$, $B(2|7)$ und $C(4|6)$.

a) Bestimmen Sie die lineare Funktion $g_1(x)$, die durch A und B verlaufen sowie die lineare Funktion $g_2(x)$ durch B und C.
Beginnen wir mit $g_1(x)$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{2-1} = 4$
Um n zu ermitteln, wird ein Punkt in die Gleichung $y = m \cdot x + n$ eingesetzt (hier nun B).
$7 = 4 \cdot 2 + n \quad \Leftrightarrow \quad -1 = n \qquad \Rightarrow \underline{\underline{g_1(x) = 4x - 1}}$

Für $g_2(x)$ gehen wir analog vor: $m = \frac{6-7}{4-2} = -\frac{1}{2} \qquad 6 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 8$
$\Rightarrow \underline{\underline{g_2(x) = -\frac{1}{2}x + 8}}$

b) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion. deren Graph durch die drei Punkte verläuft.
Gesucht ist eine allgemeine quadratische Funktion vom Typ $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y$. Durch die drei Punkte kann ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen aufgestellt werden.

$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad \Leftrightarrow \quad 3 = a + b + c$
$7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 4a + 2b + c$
$6 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 16a + 4b + c$

Dies kann mithilfe des CAS gelöst werden. Die Lösung ist: $a = -\frac{3}{2}; b = \frac{17}{2}$ und $c = -4$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{17}{2} \cdot x - 4}}$

c) Untersuchen Sie, ob es auch eine trigonometrische Funktion vom Typ $a \cdot \sin(b \cdot x) + d$ gibt.
Auch hier werden aus den drei Punkten drei Gleichungen aufgestellt.

$3 = a \cdot \sin(1 \cdot b) + d \qquad 7 = a \cdot \sin(2 \cdot b) + d \qquad 6 = a \cdot \sin(4 \cdot b) + d$

Diese drei Gleichungen werden von sehr vielen verschiedenen Parametern a, b und d gelöst. Eine Möglichkeit wäre $a \approx -8,28 \cdot 10^{-10}; b = \pi$ und $c = \frac{13}{3}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = -8,28 \cdot 10^{-10} \cdot \sin(\pi \cdot x) + \frac{13}{3}}}$

d) Untersuchen Sie weiterhin, ob es eine Exponentialfunktion $a \cdot b^x + c$ durch drei Punkte oder ob es eine Exponentialfunktion vom Typ $a \cdot e^x + c$ durch zwei Punkte gibt.
Für die erste Aufgabenstellungen werden die folgenden drei Gleichungen aufgestellt:

$3 = a \cdot b^1 + c \qquad 7 = a \cdot b^2 + c \qquad 6 = b^4 + c \qquad \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad a = \frac{16}{3}; b = -\frac{1}{2}; c = \frac{17}{3}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^x + \frac{17}{3}}}$

Eine Exponentialfunktion zur Basis e durch zwei Punkte ist sicherlich auch möglich. Dazu werden hier die Punkte A und B genutzt:

$3 = a \cdot e^1 + c \qquad 7 = e^2 + c \qquad \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} a \approx 0,856; b \approx 0,672$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = 0,856 \cdot e^x + 0,672}}$

exakt wäre es $f(x) = \frac{4}{e \cdot (e-1)} \cdot e^x + \frac{3e-7}{e-1} = \frac{1}{e-1} \cdot \left(4 \cdot e^{x-1} + 3e - 7\right)$

Aufgabe 4 (4 BE pro Aufgabe)

Stellen Sie die ersten 10 Folgenglieder der gegebenen Folge in einer Wertetabelle dar. Geben Sie außerdem das 20. und 100. Folgenglied an.

1. $(a_n) = (2 \cdot n^2)$
2. $(b_n) = ((-1)^n \cdot n)$
3. $(c_n) = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n+2}\right)$
4. $(d_n) = \left(\frac{n}{2} \cdot (1 + (-1)^n)\right)$
5. $(e_n) = (|3 - n|)$
6. $(f_n) = \left(\sqrt[n]{5}\right)$

Aufgabe 5 (4 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ ist.
Da $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ ist, gilt nach den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

Aufgabe 6 (6 BE)

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen $(a_n) = (e^{-n})$ und $(b_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot cos(n)\right)$. Stellen Sie dazu zunächst eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Beide Folgen sehen im Grafikmenü des CAS nach Nullfolgen aus (Folgen mit Grenzwert 0).

Es gilt: $\underbrace{(0)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{hat Grenzwert 0}} \leqq (a_n) \leqq \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{hat Grenzwert 0}}$ Nach dem Sandwich-Theorem gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$

Hier gilt, dass $b_n \leqq |b_n| = \left|\frac{1}{n} \cdot \cos(n)\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \cdot \underbrace{|\cos(n)|}_{\leqq 1} \leqq \left|\frac{1}{n}\right| \cdot 1 = \frac{1}{n}$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \cos(n)\right) = 0$.

Übrigens gilt grundsätzlich: Nullfolge mal beschränkte Folge ist wieder eine Nullfolge.

Aufgabe 7 (6 BE)

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Bestimmen Sie zu den gegebenen ε das entsprechende Folgenglied, ab dem alle weiteren in der Epsilon-Umgebung liegen.

a) $\varepsilon = \frac{1}{2}$

b) $\varepsilon = 0,02$

c) $\varepsilon = 0,0007$

Aufgabe 8 (2 BE pro Aufgabe)

Geben Sie eine Folge an, für die:

a) 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.

b) unendlich viele Glieder -2 sind, -2 aber trotzdem untere Schranke ist.

c) 6 kleinste obere Schranke ist, aber kein Folgenglied gleich 6 ist.