Aufgaben zur Wiederholung Nullstellen (05.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE pro Funktion – ohne CAS)

Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der gegebenen quadratischen Funktionen.

$f_1(x) = x(x+5)$ $\quad x_1 = 0$ und $x_2 = -5$ $\quad S\left(-\frac{5}{2} \mid -\frac{25}{4}\right)$

$f_2(x) = 2x^2 - 8$ $\quad x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ $\quad S\left(0 \mid -8\right)$

$f_3(x) = x^2 - x - 6$ $\quad x_1 = \frac{7}{4}$ und $x_2 = -\frac{3}{4}$ $\quad S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{25}{4}\right)$

$f_4(x) = (x-2)\cdot(x+3)$ $\quad x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ $\quad S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{21}{4}\right)$

Aufgabe 2 (2 BE pro Aufgabe – ohne CAS)

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

$a(x) = x^3 + 5x^2 \qquad x_{1/2} = 0;\ x_3 = -5$

$b(x) = e^x \cdot (x-4) \qquad x_1 = 4$

$c(x) = \sqrt{5x^2 - 10} \qquad x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}$

$d(x) = x^2 - 8x + 12 \qquad x_1 = 2;\ x_2 = 6$

$e(x) = 4x^2 - 8 - 4x \qquad x_1 = 2;\ x_2 = -1$

$f(x) = (x+3)^2 - 1 \qquad x_1 = -2;\ x_2 = -4$

$g(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \qquad x_1 = -3$

$h(x) = 2 \cdot 3^x - 18 \qquad x_1 = 2$

$i(x) = x^2 - e^2 \qquad x_1 = -e;\ x_2 = e$

$j(x) = 7x \cdot \ln(2x+1) \qquad x_1 = 0$

$k(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{5x^3 - 4} \qquad x_1 = 0;\ x_2 = -2$

$l(x) = 4xe^x - 8e^x + 4x^2e^x \qquad x_1 = 1;\ x_2 = -2$

$m(x) = 2x^2 \cdot \sin(x) \qquad x_k = k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$n(x) = \ln(x-3) + 1 \qquad x_1 = e^{-1} + 3 = 3 + \dfrac{1}{e}$

$o(x) = x^3\cos(x) + 4x^3 \qquad x_1 = 0$

$p(x) = (x^2+7) \cdot \ln(x) \qquad x = 1$

$q(x) = \sqrt{2-4x} - 2x + 1 \qquad x_1 = -\dfrac{1}{2};\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

$r(x) = (x^2 - 9)^5 \qquad x_1 = -3;\ x_2 = 3$

Aufgabe 3 (2+2 BE)

Ermitteln Sie, wie der Parameter a gewählt werden muss, damit der Graph der Funktion genau zwei Nullstellen besitzt.

$g(x) = 2x^2 + 6x + a \qquad h(x) = x^2 - ax + 4$

a) $0 = x^2 + 3x + \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{a}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} - \frac{a}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{4} > \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{9}{2}$

b) $0 = x^2 - ax + 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 16} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{4} - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 > 64$

$\Leftrightarrow \quad a < -8$ oder $a > 8$ in Intervallschreibweise: $a \in (-\infty; -8) \cup (8; \infty)$

Aufgabe 4 (4+3 BE) – TR, kein CAS-Befehl

Gegeben ist das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen.

Es ist $p(x) = x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2 = x^2 \cdot (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)$. Daher ist $x = 0$ eine doppelte Nullstelle. Anschließend muss eine Nullstelle geraten werden, z.B. $x = 1$ ist Nullstelle. Abspalten durch Horner-Schema:

	1	6	3	-10
		1	7	10
1	1	7	10	0

Also ist $p(x) = x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 7x + 10)$
Die letzten beiden Nullstellen können mit p-q-Formel ermittelt werden und sind $x = 5$ und $x = 2$

b) Bestimmen Sie mithilfe des Horner-Schemas $f(2)$, $f(-1)$ und $f(10)$

	1	6	3	-10
		2	16	38
2	1	8	19	28

	1	6	3	-10
		-1	10	26
-1	1	5	13	16

	1	6	3	-10
		10	160	1630
10	1	16	163	1620

Aufgabe 5 (2 BE)

Von einem Polynom vierten Grades sind die Nullstellen bekannt: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$. Weiterhin gilt: $f(4) = -72$. Bestimmen Sie ausgehend von diesen Informationen die Funktionsgleichung.

$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)$

$f(4) = -72 \quad \Leftrightarrow \quad -72 = a \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-1) \quad \Leftrightarrow \quad -72 = -24 \cdot a \quad \Leftrightarrow a = 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 3 \cdot (x + 2) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)}} = 3x^4 - 18x^3 - 3x^2 + 90x$