Analyse von Parameterfunktionen

Heute zu Gast:

die Parametereule

Ca. 15 Minuten Erarbeitung
Ca. 45 Minuten Übung

Treffen wir uns heute zum ersten Mal? Dann ignorier die Landkarte und klick auf den Wegweiser unten rechts.

$h_t(x) = cos(tx)$

$f_n(x) = 2x + n$

Guten Tag, ich bin die Parametereule.
Heute zeige ich euch, dass die Analyse von Funktionen mit Parametern ganz einfach ist.

Um mich herum sind schon einige Parameterfunktionen. Diese Parameter können mit verschiedenen Buchstaben dargestellt werden.

$g_a(x) = x^2 + ax - a$

Dann lass uns loslegen.

a … ist der Parameter.
$g_a(x)$ … Funktion g in Abhängigkeit von a

$$g_a(x) = x^2 + ax - a \qquad a \in \mathbb{R}$$

$g_a(x)$ beschreibt für jeden möglichen Wert für a jeweils eine Funktion.
Zum Beispiel beschreibt es:

$$g_1(x) = x^2 + 1x - 1$$

$$g_5(x) = x^2 + 5x - 5$$

$$g_{2,3}(x) = x^2 + 2{,}3x - 2{,}3$$

zurück

verstanden

Schauen wir uns mal $f_n(x)$ genauer an.
Parameter sind Variablen und können verschiedene Werte annehmen. Wenn wir sie genauer in den Funktionen betrachten, verstehen wir wie sie die Funktion beeinflussen.

$$f_n(x) = 2x + n$$

$$f_n(x) = 2x + n$$

zurück

verstanden

Erstmal untersuchen wir es beispielhaft und setzen zwei Werte für n ein.
Ich nehme mal $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$.

$f_n(x) = 2x + n$

$f_1(x) = 2x + 1$

$f_2(x) = 2x + 2$

$f_n(x) = 2x + n$

zurück

verstanden

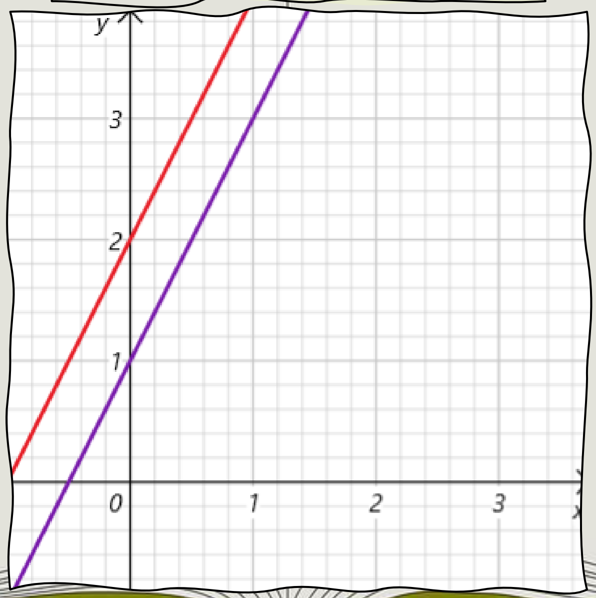
Erstmal untersuchen wir es beispielhaft und setzen zwei Werte für n ein.
Ich nehme mal $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$.
Also ist $f_1(x) = 2x + 1$ (lila)
und $f_2(x) = 2x + 2$ (rot)

$f_n(x) = 2x + n$

$f_1(x) = 2x + 1$

$f_2(x) = 2x + 2$

$f_n(x) = 2x + n$



zurück

verstanden

So wird deutlich, dass der Parameter n den Funktionsgraphen entlang der

x-Achse verschiebt.

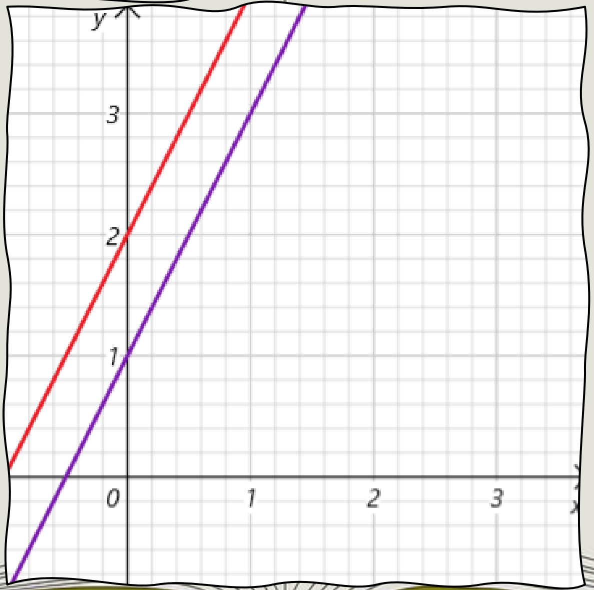
y-Achse verschiebt.

$f_n(x) = 2x + n$

$f_1(x) = 2x + 1$

$f_2(x) = 2x + 2$

$f_n(x) = 2x + n$



zurück

Bist du dir sicher? Schau dir die Graphen noch einmal genauer an.

Ganz genau, der Parameter verschiebt entlang der y-Achse.

Jetzt haben wir exemplarisch erstmal verstanden, wie dieser Parameter die Funktion beeinflusst. Mathematisch würden wir jetzt die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen prüfen.

$$f_n(x) = 2x + n$$

zurück

verstanden

$f_n(x) = 2x + n$

Bei der **Analyse der Parameterfunktionen** gehen wir **wie** bei der **Kurvendiskussion** ganz **normal vor**.
Bloß, dass wir am Ende keine Zahl, sondern einen **Term mit dem Parameter** stehen haben.

zurück

verstanden

Als erstes prüfen wir die Nullstellen. Eine Nullstelle herrscht vor, wenn $f(x_0) = 0$ ist.
Gesucht ist x_0.

$f_n(x) = 2x + n$

$f_1(x) = 2x + 1$

Beispielhaft	Parameteranalyse (Allgemein)
$f_1(x) = 2x + 1$	$f_n(x) = 2x + n$
$0 = 2x_0 + 1 \mid -1$	$0 = 2x_0 + n \mid -n$
$-1 = 2x_0 \mid :2$	$-n = 2x_0 \mid :2$
$-\frac{1}{2} = x_0$	$-\frac{1}{2}n = x_0$
$x_0 = -\frac{1}{2}$	$x_0 = -\frac{1}{2}n$
$\rightarrow S_x\left(-\frac{1}{2} \middle\vert 0\right)$	$\rightarrow S_x\left(-\frac{1}{2}n \middle\vert 0\right)$

zurück

verstanden

Siehst du das auch? Die Rechenschritte sind identisch! Bloß, dass wir im Beispiel mit Zahlen und im allgemeinem Fall mit einer Variablen (dem Parameter rechnen).

Beispielhaft

$$f_1(x) = 2x + 1$$

$$0 = 2x_0 + 1 \quad | -1$$
$$-1 = 2x_0 \quad |:2$$
$$-\frac{1}{2} = x_0$$
$$x_0 = -\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow S_x\left(-\frac{1}{2}\middle|0\right)$$

Parameteranalyse (Allgemein)

$$f_n(x) = 2x + n$$

$$0 = 2x_0 + n \quad | -n$$
$$-n = 2x_0 \quad |:2$$
$$-\frac{1}{2}n = x_0$$
$$x_0 = -\frac{1}{2}n$$
$$\rightarrow S_x\left(-\frac{1}{2}n\middle|0\right)$$

zurück

verstanden

Im Ergebnis haben wir den Parameter in einem Term stehen. Das ist genau richtig. Nur so wissen wir, wie der Parameter sich auf das Untersuchte (in dem Fall die Nullstellen) auswirkt.

Beispielhaft

$$f_1(x) = 2x + 1$$

$$0 = 2x_0 + 1 \;|-1$$
$$-1 = 2x_0 \;|:2$$
$$-\frac{1}{2} = x_0$$
$$x_0 = -\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow S_x\left(-\tfrac{1}{2}\middle|0\right)$$

Parameteranalyse (Allgemein)

$$f_n(x) = 2x + n$$

$$0 = 2x_0 + n \;|-n$$
$$-n = 2x_0 \;|:2$$
$$-\frac{1}{2}n = x_0$$
$$x_0 = -\frac{1}{2}n$$
$$\rightarrow S_x\left(-\tfrac{1}{2}n\middle|0\right)$$

zurück

verstanden

Überprüfen wir den Einfluss des Parameters beispielhaft (nur zum Verständnis).

$f_n(x) = 2x + n$

n	2	3	4
$x_0 = -\frac{1}{2}n$	$-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$	$-\frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$

$$f_n(x) = 2x + n$$

$$0 = 2x_0 + n \mid -n$$

$$-n = 2x_0 \mid :2$$

$$-\frac{1}{2}n = x_0$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}n$$

$\rightarrow S_x\left(-\frac{1}{2}n \middle| 0\right)$

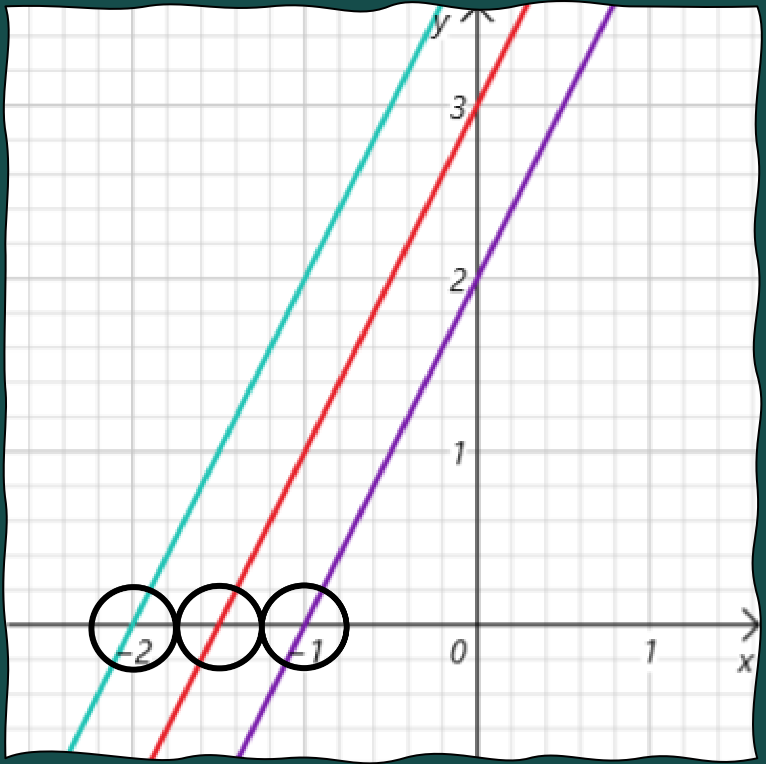
zurück

verstanden

Die Analyse von Parametergleichung ermöglicht uns für alle möglichen Werte für den Parameter (z. B. $\boldsymbol{n}$) den Einfluss zu ermitteln.

$$f_n(x) = 2x + n$$

$\boldsymbol{n}$	**2**	**3**	**4**
$x_0 = -\frac{1}{2}n$	$-\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$	$-\frac{1}{2}\cdot 3 = -\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}\cdot 4 = -2$



zurück

verstanden

Sehr gut! Nun wollen wir noch den Schnittpunkt mit der y-Achse in Abhängigkeit von $\boldsymbol{n}$ prüfen. Deswegen müssen wir $x = 0$ setzen.

$$f_n(x) = 2x + n$$

Parameteranalyse (Allgemein)

$$f_n(0) = 2 \cdot 0 + n$$

zurück

verstanden

Wir untersuchen gleich allgemein und stellen nach y um.

$f_n(x) = 2x + n$

Parameteranalyse (Allgemein)

$$f_n(0) = 2 \cdot 0 + n$$

$$y = 2 \cdot 0 + n$$
$$y = n$$
$$\rightarrow S_y(0|n)$$

zurück

verstanden

Z. B. der Schnittpunkt an der y-Achse für $f_2(x), f_3(x)\ und\ f_4(x)$

$$f_n(x) = 2x + n$$

n	2	3	4
$y = n$	2	3	4

Parameteranalyse (Allgemein)

$$f_n(0) = 2 \cdot 0 + n$$

$$y = 2 \cdot 0 + n$$
$$y = n$$
$$\rightarrow S_y(0|n)$$

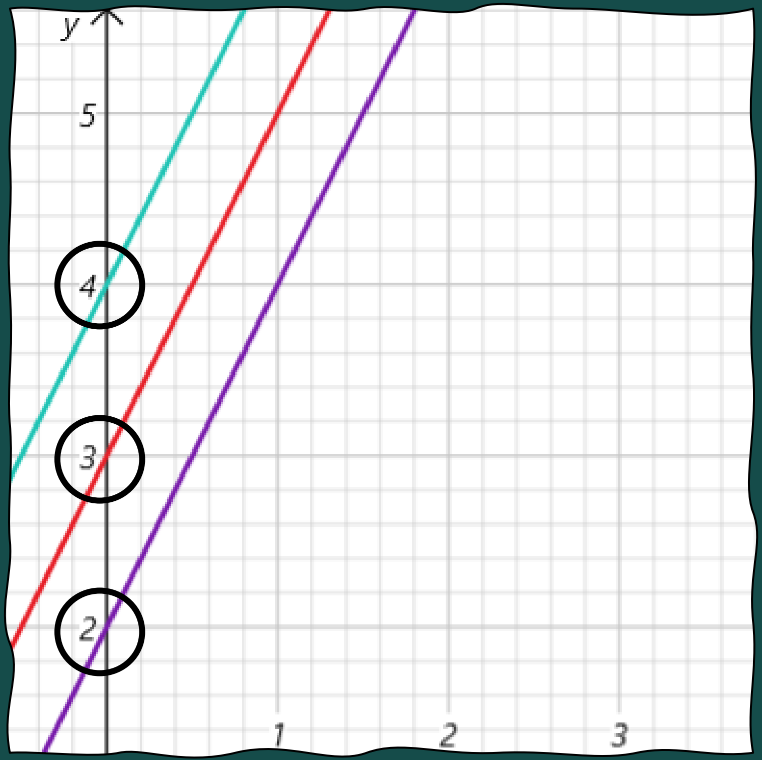
zurück

verstanden

Z. B. der Schnittpunkt an der y-Achse für $f_2(x), f_3(x)\ und\ f_4(x)$

$f_n(x) = 2x + n$

n	2	3	4
$y = n$	2	3	4



zurück

verstanden

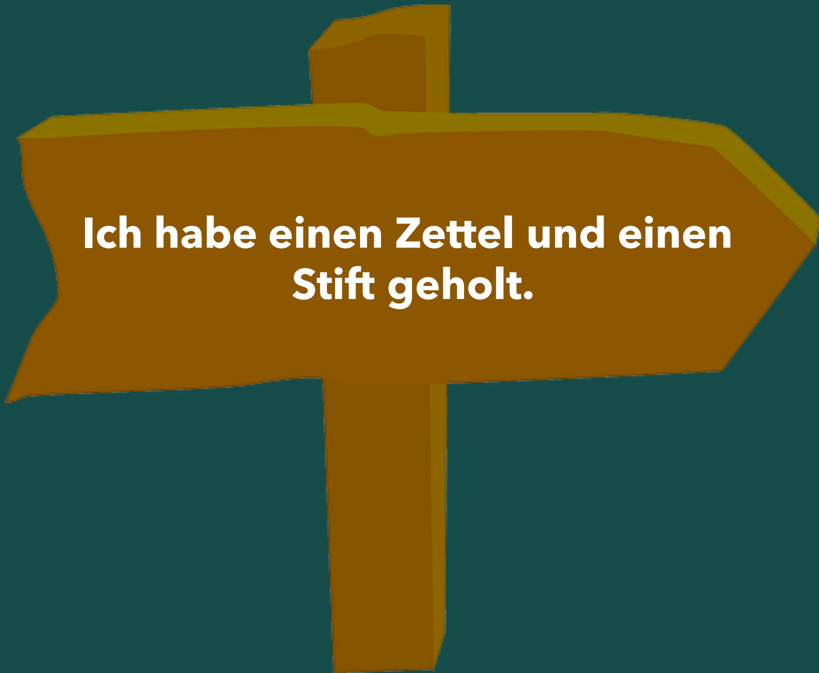
So wir haben es fast geschafft!
Jetzt hast du die Wahl.

Zurück zu der allgemeinen Erklärung von Parameterfunktionen

Zurück zu der beispielhaften Erklärung an linearen Funktionen

Im letzten Abschnitt wenden wir das Wissen bei einer Kurvendiskussion an.

Du brauchst für die Übung einen Zettel und einen Stift zum mitschreiben.



In dem schlauen Buch stehen die drei Schritte die bei jeder Kurvendiskussion wichtig sind. Egal ob wir einen Parameter haben oder nicht. Das Buch schenke ich euch. Das wird euch behilflich sein.

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig

zurück

Weiter geht's.

So lasst uns jetzt gemeinsam die Funktion $g_a(x)$ in Abhängigkeit von dem Parameter a untersuchen.

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

Untersuchen möchten wir:

- Nullstellen
- Extremstellen
- Wendestellen
- Tangente am Punkt $P(0|y_P)$

Nullstellen untersuchen

Extrempunkte untersuchen

Wendepunkte untersuchen

Tangente am Punkt P untersuchen

zurück

Ich habe alle Aufgaben gelöst

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

Nullstellen untersuchen

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 1. vergleichen

Nullstellen untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

1. Für die Nullstellen setzen wir y=0

Also: $g_a(x) = 0$.

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 2. vergleichen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

Nullstellen untersuchen

2. Jetzt setzen wir in unsere Funktion ein.

$$0 = x^2 + ax - a$$

Wir lösen mit der p-q Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 4a}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a}$$

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 3. vergleichen

Nullstellen untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

3. Negative Wurzeln sind nicht reell. Also Untersuchen wir $\sqrt{a^2 + 4a}$.
   Für $a \geq 0$ ist die Wurzel nicht negativ. Und für $a \leq -4$ auch nicht.

Also existieren reelle Nullstellen,
wenn $a \geq 0$ oder $a \leq -4$ ist.

Da $x_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a}$, sind die Nullstellen bei $x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a}$
Und bei $x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a}$ für $a \geq 0$ oder $a \leq -4$.

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

Zurück zu den Aufgaben

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

Extrempunkte untersuchen

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

Extrempunkte untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

1. Für die Extremstellen setzen wir 1. Ableitung gleich Null ($f'(x) = 0$) und überprüfen mit der 2. Ableitung ob ein min oder max besteht. ($f''(x) > 0 \rightarrow Min, f''(x) < 0 \rightarrow Max$)

$$g_a'(x) = 0 = 2x + a$$

$$g_a''(x) = 2$$

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 2. und 3 vergleichen

Extrempunkte untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

2. $g_a'(x) = 0 = 2x + a$ Wir wollen den x-Wert erfassen, also formen wir nach x um.

$$0 = 2x + a \mid -a \mid :2$$

$$-\frac{1}{2}a = x$$

Diesen Punkt prüfen wir in der 2. Ableitung $g_a''\left(-\frac{1}{2}a\right) = 2 > 0$ also min

Um den y-Wert vom Tiefpunkt zu ermitteln, müssen wir in $g_a\left(-\frac{1}{2}a\right)$ einsetzen.

$$g_a\left(-\frac{1}{2}a\right) = \left(-\frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{1}{2}a \cdot a - a = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - a = -\frac{1}{4}a^2 - a$$

Also: $T\left(-\frac{1}{2}a \middle| -\frac{1}{4}a^2 - a\right)$

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

Zurück zu den Aufgaben

Wendepunkte untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 1. vergleichen

Wendepunkte untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

1. Eine Wendestelle existiert, wenn die 2. Ableitung Null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte ungleich Null ($f'''(x) \neq 0$).

$$g_a'(x) = 2x + a$$
$$g_a''(x) = 2$$
$$g_a'''(x) = 0$$

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 2. und 3. vergleichen

Wendepunkte untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$

2.

$$g_a''(x) = 2$$

Für beliebiges x ist $g_a''(x) \neq 0$, also existiert kein Wendepunkt.

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

Zurück zu den Aufgaben

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$
$$P(0|y_P)$$

Tangente am Punkt P untersuchen

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 1. vergleichen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$
$$P(0|y_P)$$

Tangente am Punkt P untersuchen

1. Gesucht ist ein Tangente $t(x) = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{n}$

Also müssen wir $\boldsymbol{m}$ *und* $\boldsymbol{n}$ bestimmen.

Da der Anstieg im Punkt P der Tangente gleich dem Anstieg des Graphen $g_a(x)$ sein muss, setzen wir den Punkt in die 1. Ableitung ein:

$$g'_a(x) = 2x + a$$
$$g'_a(0) = \boldsymbol{m}$$

Anschließend berechnen wir die y-Koordinate von P aus und setzen in unsere Gleichung $f(x)$*ein und können nach* $\boldsymbol{n}$ *umstellen*.

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

zurück

Lösungen zu 2. und 3. vergleichen

Tangente am Punkt P untersuchen

$$g_a(x) = x^2 + ax - a$$
$$P(0|y_P)$$

2. $g_a'(x) = 2x + a$

$$g_a'(0) = a \cdot 0 + a$$
$$g_a'(0) = a$$

Also ist der Anstieg von t(x) $m = a$

y-Koordinate von P berechnen:

$$g_a(0) = 0^2 + a \cdot 0 - a$$
$$g_a(0) = -a \rightarrow \mathbf{P(0|-a)}$$
$$P(0|-a) \text{ in } t(x) \text{ einsetzen: } t(0) = -a = a \cdot 0 + n$$
$$-a = n$$
$$\rightarrow t(x) = ax - a$$

1. Welche Gleichungen brauchen wir?
2. Einsetzen in die zu untersuchende Funktion und ausrechnen/umformen.
3. Auswerten der Ergebnisse falls notwendig.

Zurück zu den Aufgaben

Geschafft!

Sehr gut,
Du bist am Ziel angekommen!
Falls du dir noch was anschauen möchtest, dann folge den Wegen.

Zurück zum Anfang

Zurück zu der beispielhaften Erklärung an linearen Funktionen

Zurück zur Übung