5. Stochastik

5.3 Diskrete Zufallsgrößen

H. Wuschke

17. Dezember 2021

Ziele der Sitzung

- Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Werte einer Zufallsgröße berechnen
- eine Verteilung grafisch und tabellarisch für eine Zufallsgröße aufstellen
- diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden
- Erwartungswert und Standardabweichung für diskrete Zufallsgrößen berechnen und interpretieren

Fäden, Kreise und Wahrscheinlichkeiten

1. Zwei Fäden werden zufällig (man sieht nicht welches Ende zu welchem Faden gehört) miteinander verknotet. Es entsteht ein großer Kreis oder zwei kleine Kreise. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Kreis und für zwei Kreise.

2. Führen Sie den Zufallsversuch nun mit drei Fäden durch und beschreiben Sie die Versuchsausgänge.

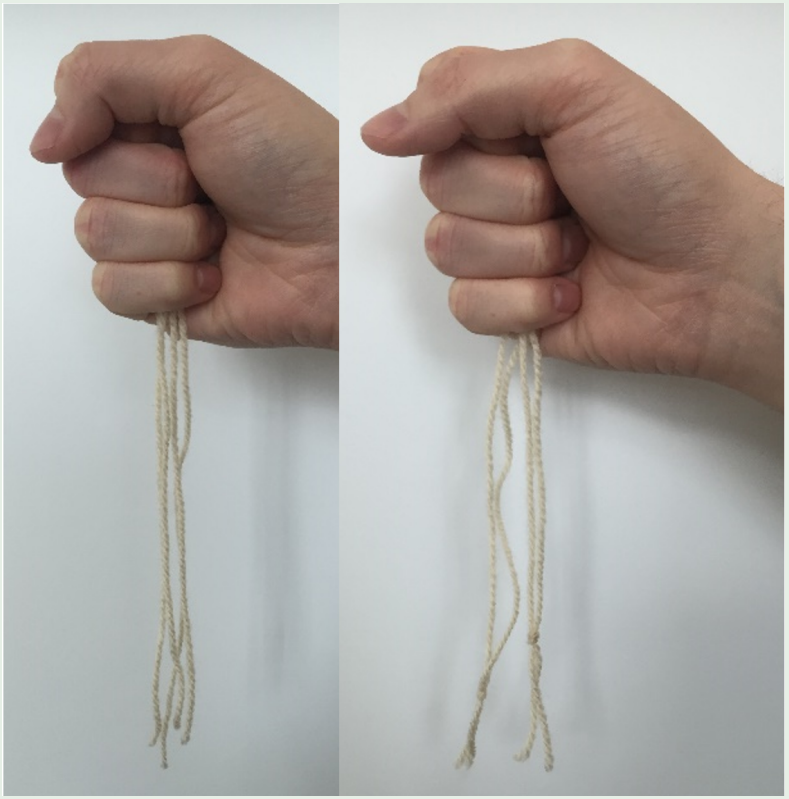


Abbildung: HW, 2017

Lösung der Aufgabe

1.

Anzahl der Kreise	1	2
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2.

Anzahl der Kreise	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

Die Anzahl der Kreise ist eine diskrete Zufallsgröße, der wiederum eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet wurde.

diskrete und stetige Zufallsgrößen

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis eines Zufallsversuches eine reelle Zahl k zuordnet, heißt **Zufallsgröße**. Symbolisch: $X = k$

Man spricht von **stetigen Zufallsgrößen**, wenn die Funktion auf reelle Intervalle abbildet.
Man spricht von **diskreten Zufallsgrößen**, wenn die Funktion endlich viele Werte annimmt.

Verteilung

Die (Wahrscheinlichkeits-)**Verteilung** ist eine Funktion, die jedem Wert einer Zufallsgröße ihre Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Symbolisch: $P(X = k)$ mit $0 \leqq P(X = k) \leqq 1$.

Diese Funktion heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bei diskreten Zufallsgrößen und **Dichtefunktion** bei stetigen Zufallsgrößen.

Tabellarische Wahrscheinlichkeitsverteilung

X: Anzahl der Kreise beim zufälligen Fadenknüpfen

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

Bemerkung

Es gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von n diskreten Zufallsgrößen:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = k_i) = 1$$

Graphische Wahrscheinlichkeitsverteilung – Histogramm

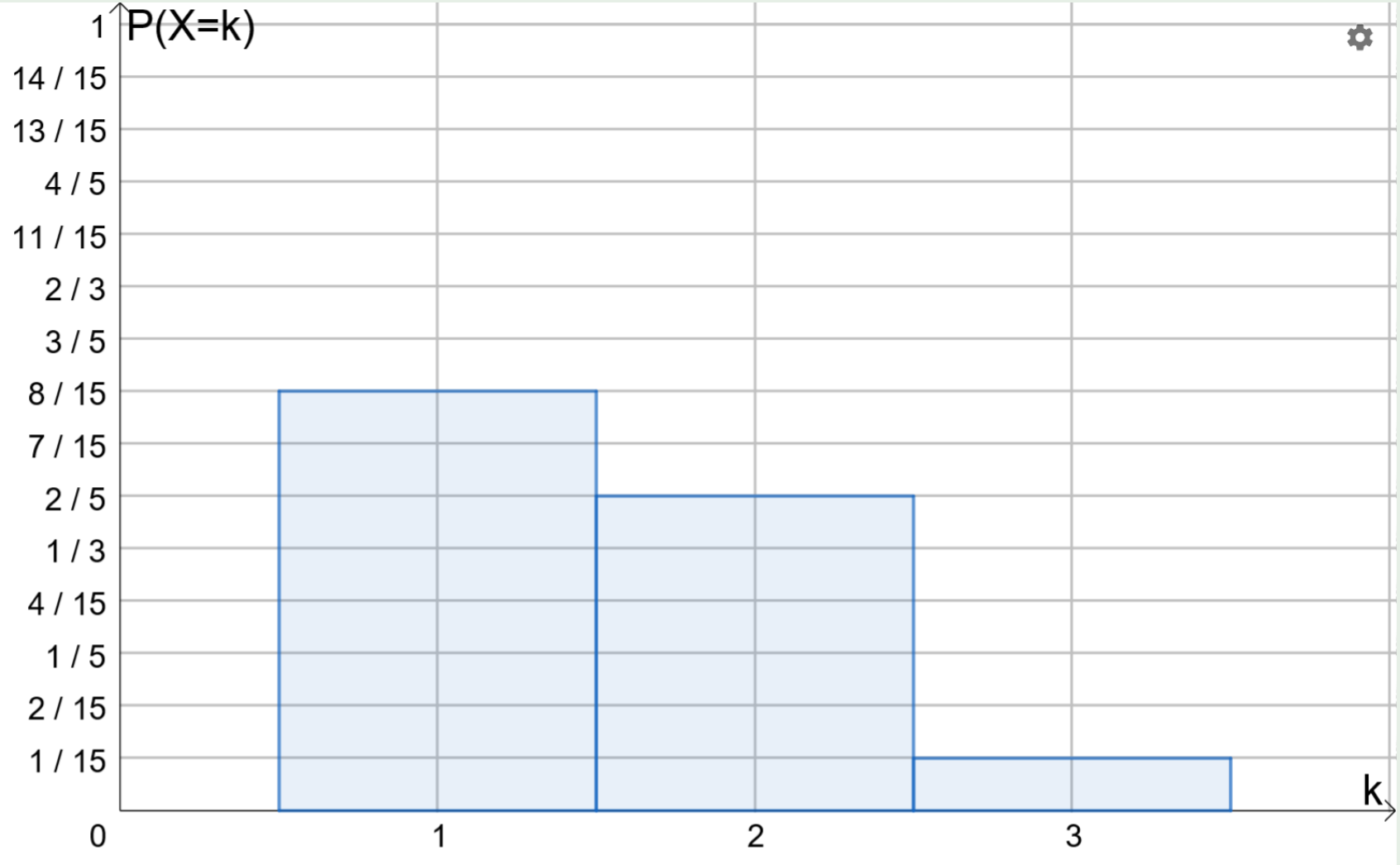


Abbildung: Wahrscheinlichkeitsverteilung [Geogebra HW, 2018]

Aufgaben A1

1. Begründen Sie, dass es sich nicht um die grafische Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.

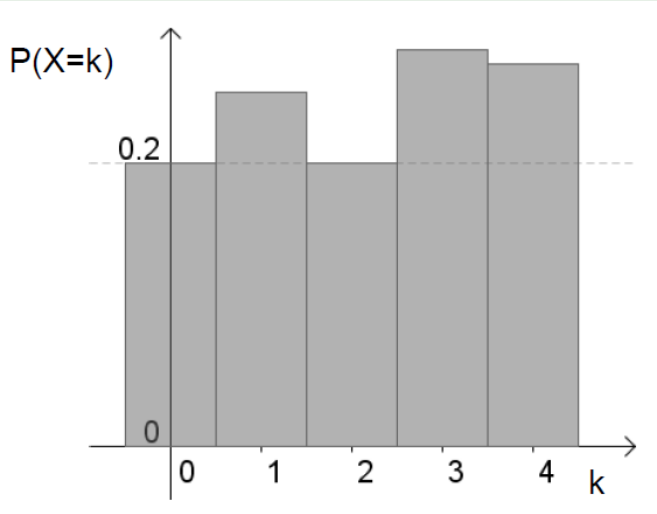


Abbildung: Abitur MV, hilfsmittelfrei, 2010

2. Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Bestimmen Sie y.

k	-2	0	3	10
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	y	$\frac{5}{18}$

Aufgabe A2

6. Im Mathematikunterricht hat Alexander zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Form von Histogrammen gezeichnet. Begründen Sie, warum jedes der Histogramme fehlerhaft ist.

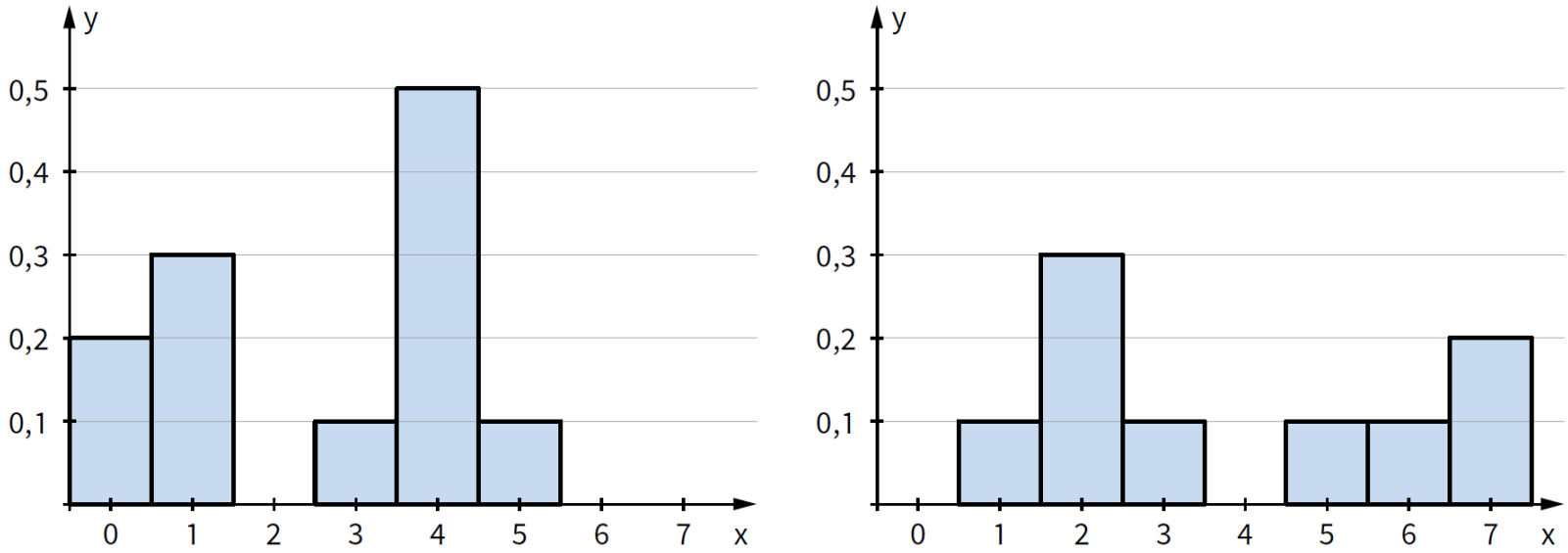


Abbildung: EdM 11 Sachsen, S. 280, HW

Sprech- und Schreibweisen

Sei die Zufallsgröße X: Alter von Personen in Jahren.

- $X = 18$
  Das Alter der Person ist 18 Jahre.
- $P(X = 18)$
  Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person 18 Jahre alt ist
- $P(X = 18) = \frac{2}{100}$
  Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person 18 Jahre alt ist, liegt bei 2%.

Interpretation von Intervallangaben

Formulierung	mathematische Übersetzung
„... *weniger als 42 ...*“	$P(X < 42) = P(X \leqq 41)$
„... *höchstens 42 ...*“	$P(X \leqq 42)$
„... *genau 42 ...*“	$P(X = 42)$
„... *mindestens 42 ...*“	$P(X \geqq 42)$
„... *mehr als 42 ...*“	$P(X > 42) = P(X \geqq 43)$
„... *zwischen 42 und 59...*“	$P(42 < X < 59) = P(43 \leqq X \leqq 58)$
„... *von 42 bis 59 ...*“	$P(42 \leqq X \leqq 59)$

Erwartungswert

Sei X eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	k_1	k_2	$\dots$	k_n
$P(X=k)$	$P(X=k_1)$	$P(X=k_2)$	$\dots$	$P(X=k_n)$

Dann ist der zu erwartende Mittelwert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(X = k_i)$$

$$\mu = E(X) = k_1 \cdot P(X = k_1) + k_2 \cdot P(X = k_2) + \dots + k_n \cdot P(X = k_n)$$

Dieser Wert heißt **Erwartungswert** von X.

Erläuterungen

Der Erwartungswert berechnet sich wie das arithmetische Mittel.

Ein Spiel (um Geld) wird als fair bezeichnet, wenn $E(X) = 0$ ist.

Erwartungswert für das Fadenknüpfen

X: Anzahl der Kreise beim zufälligen Fadenknüpfen

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{6}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{23}{15} = 1,5\overline{3}$$

Es ist also ein Kreis zu erwarten.

Der Erwartungswert wird bei ganzzahligen Ergebnissen stets abgerundet.

Aufgabe A3

Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.
Bestimmen Sie y und z, sodass $E(X) = 0$ gilt.

k	-6	0	3	9
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	y	z	$\frac{1}{9}$

Standardabweichung

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und der Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	k_1	k_2	$\dots$	k_n
$P(X=k)$	$P(X=k_1)$	$P(X=k_2)$	$\dots$	$P(X=k_n)$

Dann wird die Streuung um den Erwartungswert berechnet durch

$$\sigma(X) = \sqrt{(\mu - k_1)^2 \cdot P(X=k_1) + \dots + (\mu - k_n)^2 \cdot P(X=k_n)}$$

Dieser Wert heißt **Standardabweichung** von X.

Bemerkung

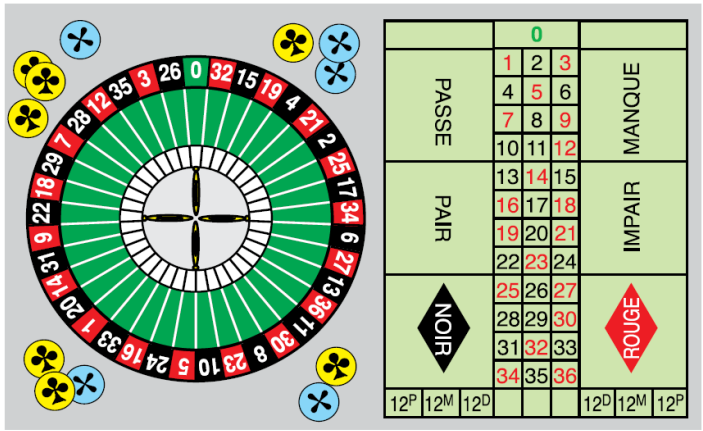
Der Wert unter der Wurzel heißt Varianz von X.

Beispiel – Roulette

Alle Wörter sind französisch:

roulette Rädchen
pair gerade ohne 0
impair ungerade
noir schwarz
rouge rot
manque niedrig, 1 bis 18
passe hoch, 19 bis 36
carré Quadrat
cheval Pferd
plein voll

6. Beim Roulette bleibt die Kugel in einem von 37 Fächern liegen. Arbeite bei den folgenden Aufgaben mit einem Einsatz von 10 €.



a) Berechne den Erwartungswert der Zufallsgrößen und beurteile, ob Roulette ein faires Spiel ist. Vergleiche außerdem die Erwartungswerte der Zufallsgrößen X, Y, Z und W.

(**1**) Die meisten Spieler setzen auf die sicheren Varianten pair, impair, noir, rouge, manque oder passe. Hier bekommt man den Einsatz doppelt zurück, wenn man gewinnt. Alle 6 Ereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. X: *Gewinn/Verlust* bei pair.

(**2**) Manche Spieler setzen auf ein carré, das heißt auf vier in einem Quadrat liegende Nummern (zum Beispiel 13, 14, 16, 17). Hier bekommt man den Einsatz neunfach zurück. Y: *Gewinn/Verlust* bei carré.

(**3**) Es gibt auch Spieler, die auf cheval, das meint zwei benachbarte Zahlen setzen. Hier erhalten sie das 18-Fache ihres Einsatzes. Z: *Gewinn/Verlust* bei cheval.

(**4**) Ganz mutige Spieler setzen auf plein, das meint eine einzige Zahl. Der Gewinn hierbei ist das 36-Fache des Einsatzes. W: *Gewinn/Verlust* bei plein.

b) Berechne nun die Standardabweichung und beurteile, ob (**1**) im Vergleich zu carré, cheval und plein wirklich sicherer ist.

c) Untersuche, wie hoch der ausgezahlte Einsatz bei den einzelnen Ereignissen sein muss, damit das Spiel fair wird.

Abbildung: EdM Sachsen 10, S. 129, HW

Lösung Aufgabe

10 € Einsatz; Gewinn bei X: 10 €; Y: 80 €; Z: 170 €; W: 350 €

k	-10 €	10 €
$P(X=k)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

k	-10 €	80 €
$P(Y=k)$	$\frac{33}{37}$	$\frac{4}{37}$

k	-10 €	170 €
$P(Z=k)$	$\frac{35}{37}$	$\frac{2}{37}$

k	-10 €	350 €
$P(W=k)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$E(X) = -10€ \cdot \frac{19}{37} + 10€ \cdot \frac{18}{37} = -\frac{10}{37}€$$

$$E(Y) = -10€ \cdot \frac{33}{37} + 80€ \cdot \frac{4}{37} = -\frac{10}{37}€$$

$$E(Z) = -10€ \cdot \frac{35}{37} + 170€ \cdot \frac{2}{37} = -\frac{10}{37}€$$

$$E(W) = -10€ \cdot \frac{36}{37} + 350€ \cdot \frac{1}{37} = -\frac{10}{37}€$$

Es ist also $E(X) = E(Y) = E(Z) = E(W)$

Es ist kein faires Spiel, da die Erwartungswerte nicht 0€ sind.

Lösung Aufgabe

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{19}{37} \cdot \left(-10€ - (-\frac{10}{37}€)\right)^2 + \frac{18}{37} \cdot \left(10€ - (-\frac{10}{37}€)\right)^2}$$

$\sigma(X) \approx 9,996€$

Analog erhält man

$\sigma(Y) \approx 27,947€$;

$\sigma(Z) \approx 40,702€$;

$\sigma(W) \approx 58,378€$

Also ist der Erwartungswert zwar gleich, aber das Spiel wird stets riskanter, je größer die Standardabweichung wird.