# 1. Grenzwerte und Stetigkeit

H. Wuschke

13. August 2020

## Ziele der Sitzung

- Definitionsbereiche angeben
- Grenzwerte bestimmen
- *Asymptoten* angeben und erkennen
- die Art einer Definitionslücke als *Polstelle*, *(hebbare) Lücke* oder *Sprungstelle* unterscheiden
- anschaulich den Begriff der *Stetigkeit* erklären

# Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

## Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

Eine **Funktion** $f$ ordnet jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in W$ zu. Dabei heißt $D$ auch der **Definitionsbereich** und $W$ der **Wertebereich** von $f$

Häufig schreibt man für diese Zuordnung: $y = f(x)$.

## Beispiele

$f_1(x) = 2x - 3$
Hier ist $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$, da alles eingesetzt werden kann und alles herauskommen kann.

$f_2(x) = x^2 + 3$
Hier ist $D = \mathbb{R}$ und $W = \{y \mid y \geqq 3\}$

# eingeschränkter Definitionsbereich

## Funktionen mit uneingeschränktem Definitionsbereich

- Polynome
- trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen

## Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich

- Die Wurzelfunktion, wie zum Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$ ist nur für nichtnegative ($\geqq 0$) Werte definiert.
- Die Logarithmusfunktion, wie zum Beispiel $f(x) = \ln(x)$ ist nur positive ($> 0$) Werte definiert.
- Gebrochenrationale Funktionen wie zum Beispiel $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ sind nicht definiert, wenn durch 0 geteilt wird.

## Aufgaben A1

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich an:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$g(x) = -x^3 - 2x^2$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x-5} \cdot e^{3x}$$

$$k(x) = \ln(x-8)$$

$$m(x) = \tfrac{1}{2}x - 5 + \sin(2x-3)$$

$$n(x) = \frac{(x-3)\cdot x}{x^2 \cdot (x-8) \cdot (x+7)}$$

$$p(x) = 3x - \sqrt{x+16} + \frac{1}{x}$$

# Grenzwert

## Grenzwert/Limes

Der **Grenzwert** oder **Limes** an einer Stelle $x_0$ einer Funktion gibt einen Wert an, dem sich die Funktion beliebig dicht nähert, ihn aber nicht notwendigerweise erreicht.

## bestimmter und unbestimmter Grenzwert

Der Grenzwert/Limes einer Funktion heißt

- **bestimmter Grenzwert**, wenn er eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$ annimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

- **unbestimmter Grenzwert**, wenn er gegen $-\infty$ oder $\infty$ strebt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

## Aufgaben A2

Geben Sie folgende Grenzwerte an:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 6x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 6x + 5)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x + 5)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} e^{\frac{2x^2+5}{x^4-16}}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{2x^2+5}{x^4-16}}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{2x^2+5}{x^4-16}}$

## Verhalten im Unendlichen

Für $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sagt man auch **Verhalten im Unendlichen**.

Es wird nämlich untersucht, wohin der Funktionsgraph für sehr kleine und sehr große $x$-Werte strebt.

## Verhalten im Unendlichen von Polynomen

Bei Polynomen entscheidet der Grad und das Vorzeichen über das Verhalten im Unendlichen.

Beispiele:

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3+x^2+4)=\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(-x^3+x^2+4)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2+4)=-\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(x^3+x^2+4)=\infty$$

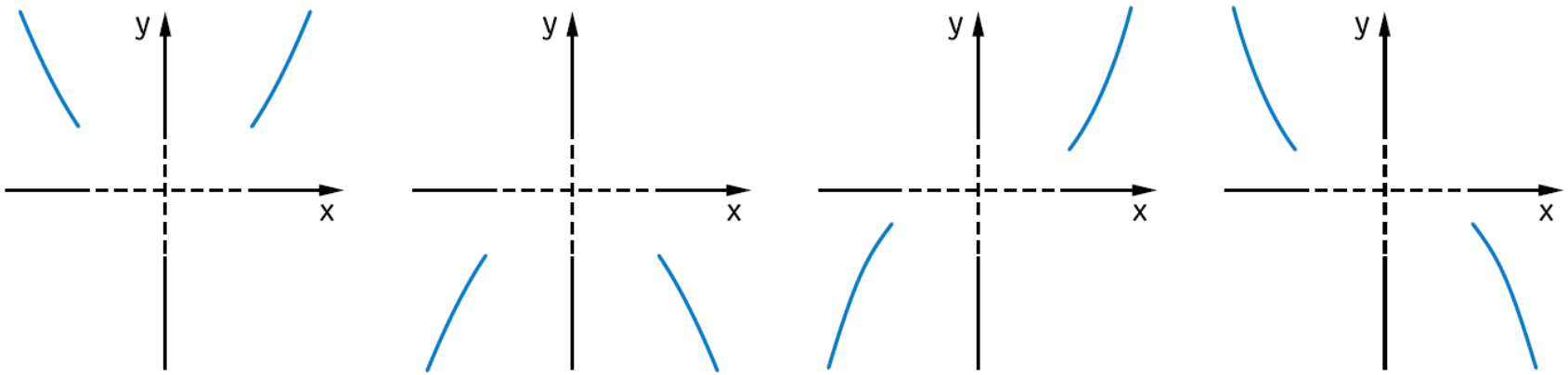
$$\lim_{x\to-\infty}(x^4+x^2-x)=\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(x^4+x^2-x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^4+x^2-x)=-\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(-x^4+x^2-x)=-\infty$$

Man kann den Globalverlauf einer ganzrationalen Funktion f mit

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

vom Grad n auf einen der folgenden Funktionstypen mit $y = a_n x^n$ zurückführen:




**n gerade, $a_n > 0$**
$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$
$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$

**n gerade, $a_n < 0$**
$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$
$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

**n ungerade, $a_n > 0$**
$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$
$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

**n ungerade, $a_n < 0$**
$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$
$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$

Abbildung: EdM 11 Sachsen, S. 14.

## Notation

Ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ schreibt man auch $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

<u>Beispiele:</u>

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4+x^2-x)=\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(x^4+x^2-x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^4+x^2-x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^4+x^2-x)=-\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(-x^4+x^2-x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(-x^4+x^2-x)=-\infty$$

## Aufgaben A3

Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlich der nachfolgenden Funktionen:

$$f(x) = -3x^5 + 6x^3 + 2x^2$$

$$g(x) = 7x^2 + 3x - 8.000$$

$$h(x) = \frac{3}{x^2 + 2}$$

$$k(x) = \frac{-3x^2 + 7x - 80}{5x^2 + 9}$$

$$m(x) = 1,4^x + 3$$

$$n(x) = 0,3^x - 4$$

## Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to -\frac{2}{45}} g(x) = -\frac{45}{2}$$

$$\lim_{x \to 42} g(x) = \frac{1}{42} \qquad \lim_{x \to -5437} g(x) = -\frac{1}{5437}$$

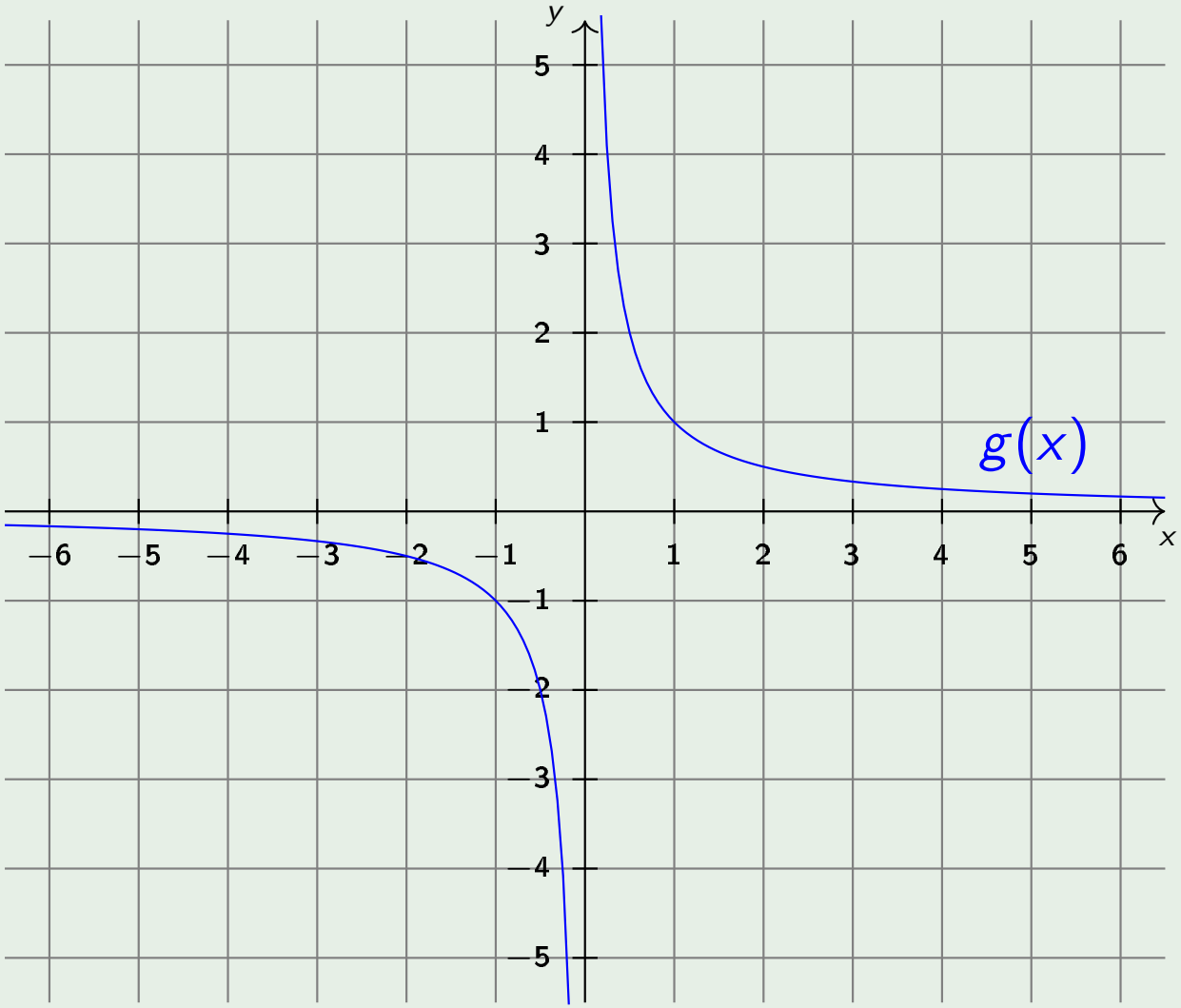
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Also ist $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = ???$$

# Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x}$$



## links- und rechtsseitiger Grenzwert

Der **linksseitige Grenzwert** einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle $x_0$ ist der Wert, dem sich die Funktion für alle $x < x_0$ beliebig dicht annähert.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Der **rechtsseitige Grenzwert** einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle $x_0$ ist der Wert, dem sich die Funktion für alle $x > x_0$ beliebig dicht annähert.

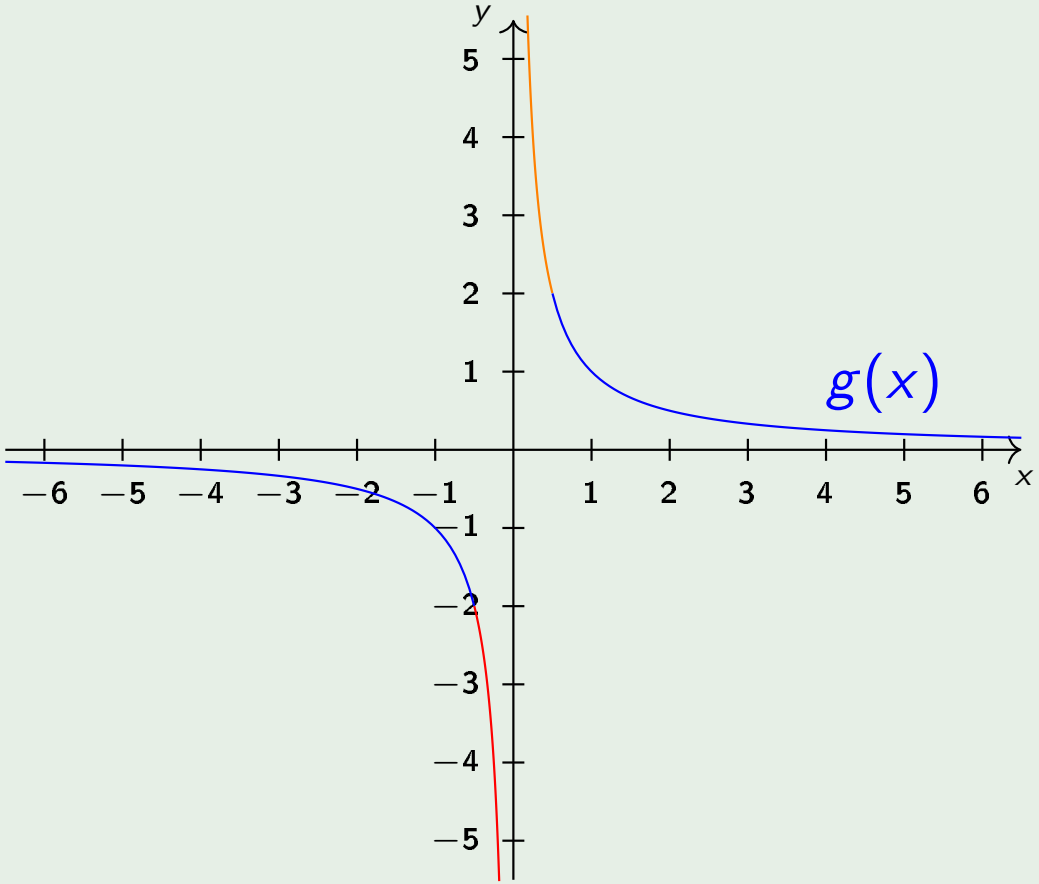
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ so ist dies der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht.

## Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) \text{ existiert nicht.}$$




$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \infty$$

## Aufgaben A4

Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte existieren, indem Sie den links- und den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle untersuchen.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$

# Asymptoten und Definitionslücken

## waagerechte Asymptote

Gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$, so hat $f(x)$ eine **waagerechte Asymptote** mit der Gleichung $y = c$

## Arten von Definitionslücken

Eine **Definitionslücke** ist eine Stelle $x_0$, an der $f(x)$ nicht definiert ist.

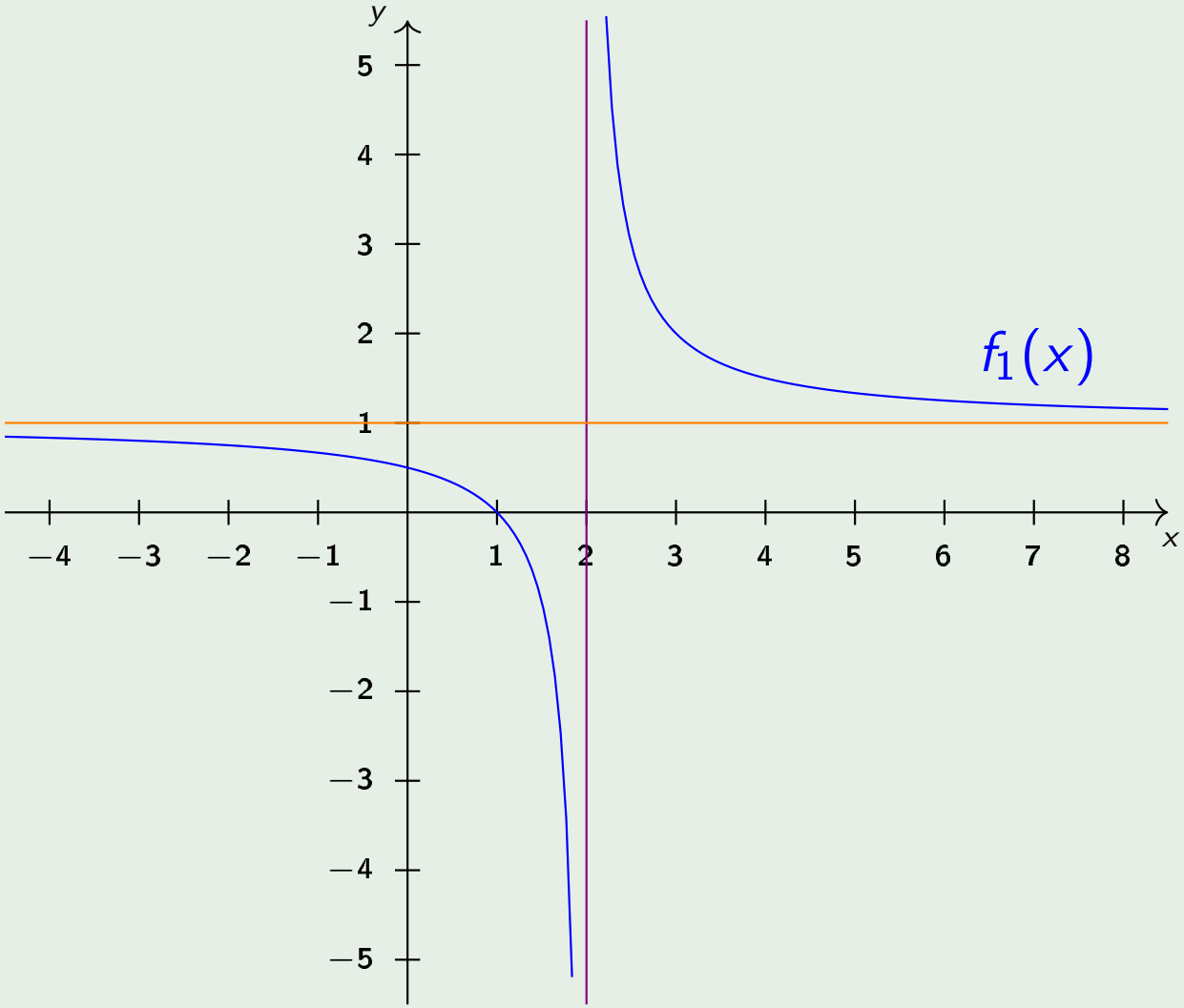
Gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, heißt die Stelle $x_0$ **(hebbare) Lücke**.

Gilt $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = d$, heißt die Stelle $x_0$ **Sprungstelle**.

Gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, heißt die Stelle $x_0$ **Polstelle** mit senkrechter Asymptote $x = x_0$.

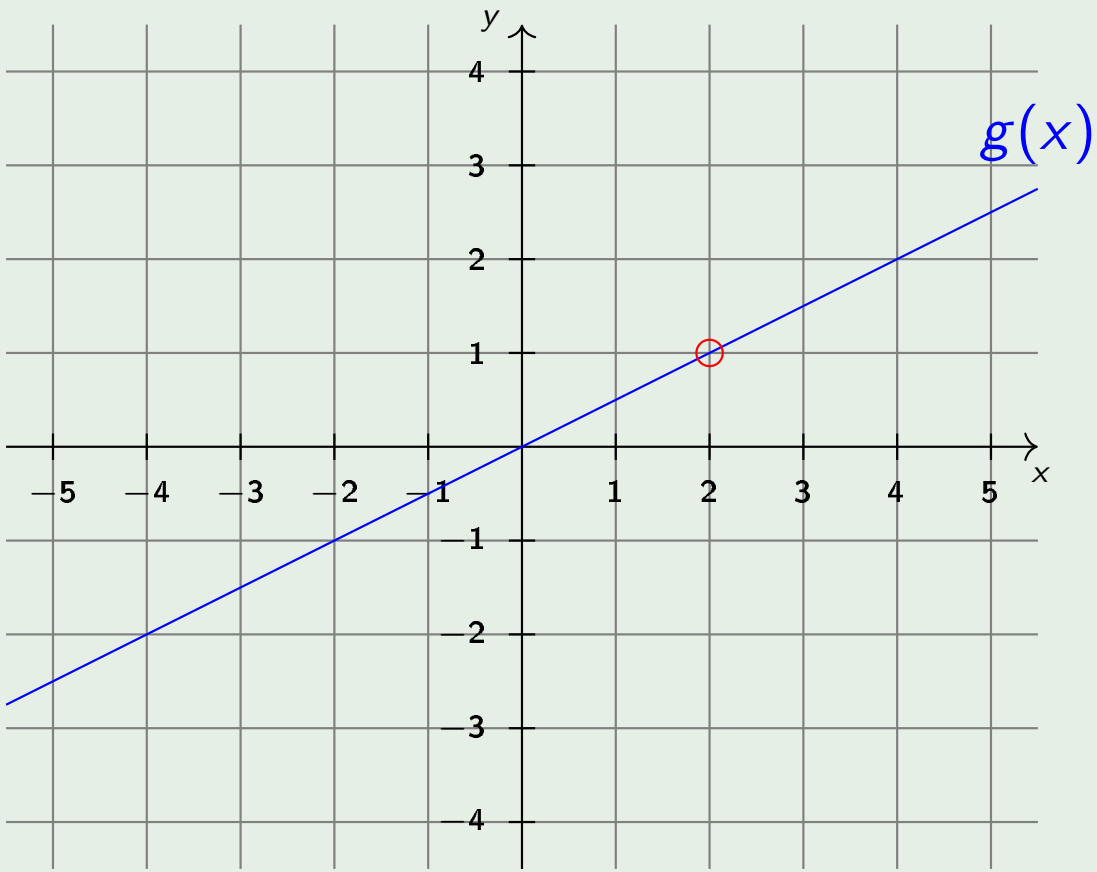
## Beispiel für Definitionslücken – Polstelle

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1 \quad \text{Asymptoten bei } x = 2 \text{ und } y = 1$$



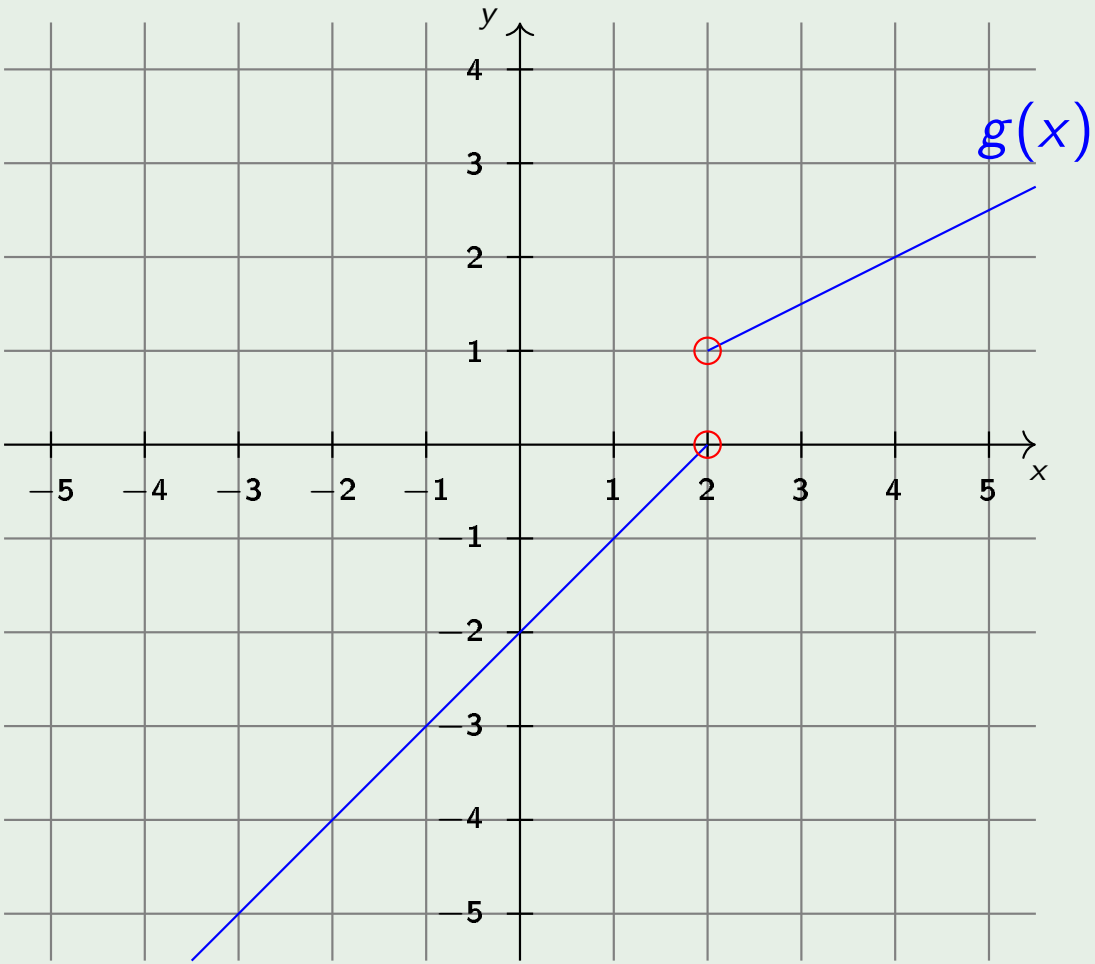
## Beispiel für Definitionslücken – (hebbare) Lücke

$$f_2(x) = \frac{0,5x \cdot (x-2)}{(x-2)} \neq 0,5x$$



## Beispiel für Definitionslücken – Sprungstelle

$$f_3(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2 \\ \frac{1}{2}x, & x > 2 \end{cases}$$



## Aufgaben A5

Geben Sie eine Funktion an, mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktion hat eine waagerechte Asymptote $y = 7$.

b) Die Funktion hat eine Polstelle bei $x_0 = 8$.

c) Die Funktion hat eine (hebbare) Lücke an der Stelle $x_0 = 6$.

d) Die Funktion hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

e) Die Funktion hat eine Polstelle bei $x_0 = -5$ und eine Lücke bei $x_1 = 0$.

f) Die Funktion hat Polstellen bei $x_0 = -19$ und $x_1 = 17$, eine Lücke bei $x_2 = 23$ und eine waagerechte Asymptote $y = 15$.

## Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetig an einer Stelle $x_0$**, wenn gilt:

$$f(x_0) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetige Funktion**, wenn sie an jeder Stelle stetig ist.

## anschauliche Stetigkeit

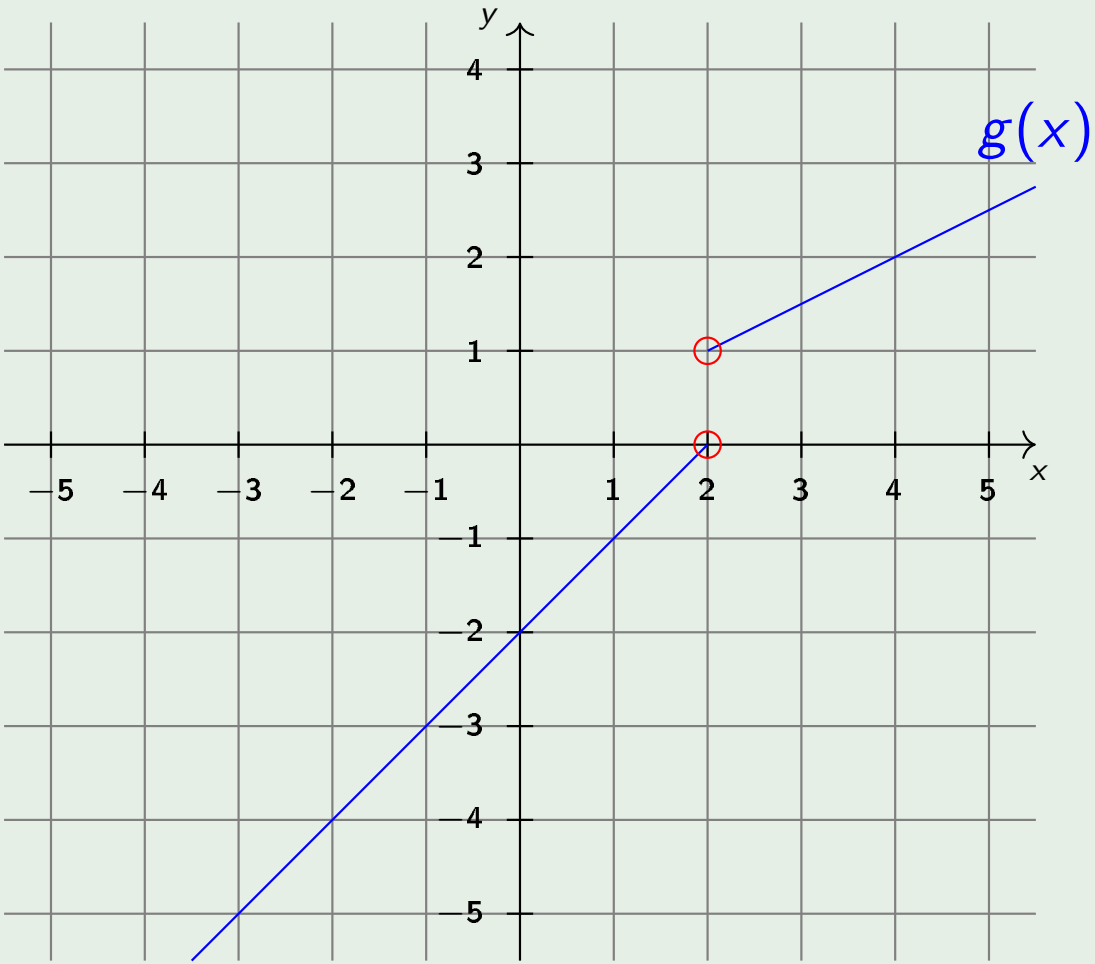
Anschaulich kann man sagen, dass eine Funktion stetig ist, wenn man sie durchzeichnen kann. Dabei darf man jedoch bei Definitionslücken den Stift absetzen.

## Bemerkung

Alle Polynome sind stetig. In der Regel sind die Funktionen, die in der Schule vorkommen stetig.

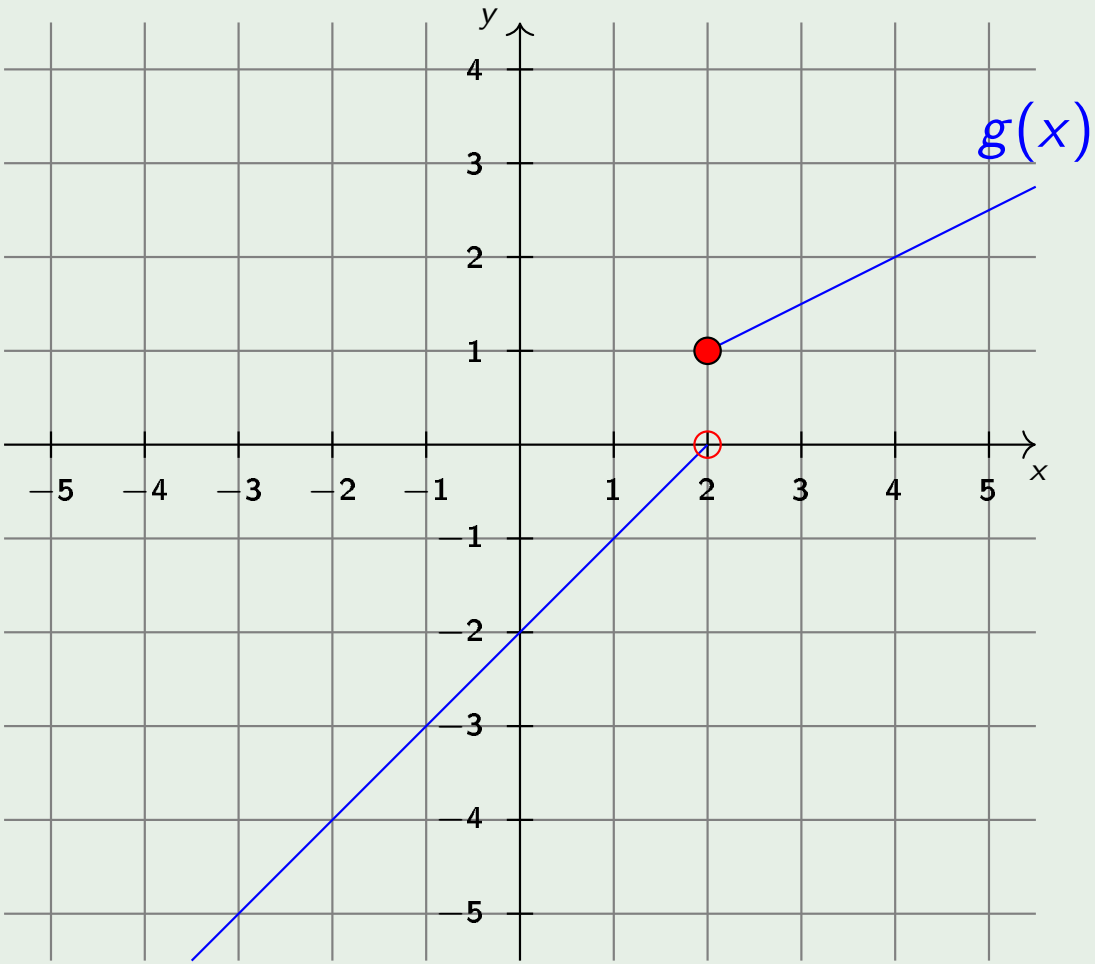
## Beispiel Stetigkeit

$$f_3(x) = \begin{cases} x-2, & x<2 \\ \frac{1}{2}x, & x>2 \end{cases}$$



## Beispiel Unstetigkeit

$$f_3(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2 \\ \frac{1}{2}x, & x \geqq 2 \end{cases}$$



## Aufgaben A6

Überprüfen Sie, ob die nachfolgenden Funktionen stetig sind:

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < 5 \\ x + 2, & x \geqq 5 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < -2 \\ x + 6, & -2 \leqq x < 2 \\ 9, & x \geqq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -3x, & x \leqq 4 \\ x^2 - 6x - 4, & x > 4 \end{cases}$$

## Zwischenwertsatz

Sei $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig mit $f(a) < y_0$ und $f(b) > y_0$.

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass gilt:

$$f(c) = y_0$$

Der Satz gilt auch für $f(a) > y_0$ und $f(b) < y_0$.

## Nullstellensatz

Sei $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass gilt:

$$f(c) = 0$$

Der Satz gilt auch für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.