Aufgaben zur Übung I (12.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

2014 brach die Ebolafieber-Epidemie in den westafrikanischen Ländern (Guinea, Liberia, Sierra Leone, Nigeria, Senegal und Mali) aus. Dabei hat die Untersuchung und Dokumentation des klinischen Verlaufs ergeben, dass nach Ausbruch der Epidemie 70,8% der Betroffenen gestorben sind.[1]

a) Begründen Sie, warum dies 2014 als binomialverteiltes Zufallsexperiment mit Zufallsgröße X: *Anzahl der infizierten Personen, die an Ebola sterben*, betrachtet werden konnte. (2 BE)

b) Eine Hilfsorganisation kümmert sich um 1.000 infizierte Personen. Berechnen Sie, wie viele Tote zu erwarten sind. (1 BE)

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an (3 BE):

   A: 700 bis 720 infizierte Personen erliegen der Krankheit.

   B: Mehr als 680 infizierte Personen sterben.

   C: Weniger als 250 infizierte Personen überleben.

d) Bestimmen Sie eine Mindest- und eine Höchstanzahl der Toten, sodass 99% aller erwartbaren Fälle erfasst sind. (2 BE)
Hinweis: Schauen Sie in gleichen Abständen links und rechts vom Erwartungswert nach kumulierten Wahrscheinlichkeiten, bis Sie das erste Mal auf 0,99 kommen.

Aufgabe 2 (2 + 1 + 3 = 6 BE)

3.3.1 Es ist bekannt, dass bei der Produktion von Kondensatoren 7 % fehlerhaft sind.
Der laufenden Produktion werden zufällig 500 Kondensatoren entnommen und auf Funktionstüchtigkeit überprüft.

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Anzahl der defekten Kondensatoren, die zu erwarten ist.

Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau 30 Kondensatoren sind defekt.
B: Höchstens 40 Kondensatoren sind defekt.
C: Die Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler ist größer als 460 aber kleiner als 470.

Abbildung 1: Abitur M-V A3, 2013

[1] https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa1411100

Aufgabe 3 (6 BE)

6% aller Deutschen haben die Blutgruppe 0-, welche für alle Empfänger verträglich ist.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

Aufgabe 4 (14 BE)

3.4 Aus der Erfahrung weiß man, dass etwa 80 % der medizinischen Einrichtungen Deutschlands in der Radiodiagnostik Präparate mit ^{99m}Tc verwenden.

3.4.1 Fünf zufällig ausgewählte Einrichtungen werden zum Einsatz dieser Präparate befragt. Die Zufallsgröße X entspricht der Anzahl der Einrichtungen, die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen. 7 BE

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und stellen Sie diese grafisch dar.

3.4.2 Bei einer anderen Erhebung wurden 50 Einrichtungen befragt. 7 BE

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: 90 % der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

B: Mindestens 30, aber weniger als 40 der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an:

C: Die zweite Einrichtung setzt dieses Präparat ein.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

D: Genau eine der ersten vier Einrichtungen setzt diese Präparat ein.

Abbildung 2: Abitur M-V A3, 2018

Aufgabe 5 (3 BE)

Zeigen Sie im Fall $n = 3$, dass für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt: $\mu = 3 \cdot p$.
Hinweis: Nutzen Sie $\mu = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3)$

Aufgabe 6 (2+3+2+3+2+4+4 BE) – IQB-Aufgabe 2017

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
1. Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte, davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft."

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft."

2. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

a) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

b) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

c) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

d) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

e) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.

Aufgabe 7 (4+2+2+3+4+2+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „+1“ beschriftet, 25 % mit „+2“, die übrigen mit „-3“.

1. a) 100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

   A: „Mehr als 30 und weniger als 45 der entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“
   B: „Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

   b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann.

2. Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.

   b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel einen Gewinn erzielt 36 % beträgt.

   c) Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms den durchschnittlichen Verlust pro Spiel.

3. Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „+1“ beschriftet, die andere mit „+2“. Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.

   a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, durch den Term $\frac{0,35n+1}{n+2}$ angegeben wird.

   b) Durch das Hinzufügen nimmt sowohl die Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, als auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+2“ beschriftet ist. Entscheiden Sie, für welche der beiden Wahrscheinlichkeiten die Zunahme größer ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.