Serie 12

1. Untersuche folgende Funktionenfolgen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$. Beantworte die Fragen (mit Begründung):

- Ist $\lim f_n$ Lebesgue-integrierbar?
- Existiert $\lim \int_I f_n(x) d\lambda^1(x)$?
- Ist $\int_I \lim f_n d\lambda^1 = \lim \int_I f_n d\lambda^1$?
- Welche Form von Konvergenz liegt für (f_n) vor: gleichmäßig, Lebesgue-majorisiert?

a) $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ auf $I = \mathbb{R}$,

b) $\frac{nx}{1+nx^2}$ auf $I = [0, 1]$,

c) $$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2\sqrt{n} - n^{\frac{3}{2}} x, & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n},, \\ 0, & x \ge \frac{2}{n}, \end{cases}$$

d) $$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le n - \frac{1}{n}, \\ nx + 1 - n^2, & n - \frac{1}{n} \le x \le n, \\ 1 + n^2 - nx, & n \le x \le n + \frac{1}{n}, \\ 0, & x \ge n + \frac{1}{n}, \end{cases}$$

2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to (f\colon X \to \mathbb{R})$ gleichmäßig auf X und f_n μ-integrabel f.a. $n \in \mathbb{N}$. *Zeige*:

$$f \text{ ist } \mu\text{-integrabel und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu\,.$$

4 Punkte

3. Es sei

$$F(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-st} \frac{\sin t}{t} d\lambda^1(t)\,.$$

a) Zeige, daß $F(s)$ für $s > 0$ im Sinne des Lebesgue-Integrals wohldefiniert ist.

b) Zeige, daß $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

c) Zeige, daß $F(s)$ für $s > 0$ differenzierbar ist und

$$F'(s) = -\frac{1}{1+s^2}\,.$$

d) Zeige: $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$.

Bitten wenden!

4. Betrachte die Funktion $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n}, & \text{falls } 2^{-n} \leq x < 2^{-n+1} \quad \text{und } 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}, \\ -2^{2n}, & \text{falls } 2^{-n-1} \leq x < 2^{-n} \quad \text{und } 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne alle Integrale entlang der horizontalen und der vertikalen Koordinatenlinien. *2 Punkte*

b) Zeige $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = 0$, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx = 1$ und $\iint_{[0,1]^2} |f(x,y)| d^2(x,y) = +\infty$ *2 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 19.01.10