Serie 10

1. Betrachte auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit M alle glatten Pfade $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$ durch einen gegebenen Punkt $p = \gamma(0)$. Definierte auf der Menge aller dieser Pfade die Äquivalenzrelation

$$\gamma \sim \bar{\gamma} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \bar{\gamma})(0) \text{ f.a. } f \in C^\infty(M)\,.$$

Es sei T_pM^{geom} die Menge aller dieser Äquivalenzklassen von Pfaden. Die Klasse $[\gamma]$ werde auch mit $\dot{\gamma}(0)$ bezeichnet.
Es sei nun $\varphi_\alpha\colon V_\alpha \to U_\alpha$ eine Karte mit $\varphi_\alpha(p) = 0$. Betrachte die Abbildung

$$K\colon \gamma \mapsto \frac{d}{dt}(\varphi_\alpha \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^n\,.$$

a) Zeige: $K(\gamma)$ hängt nur von $[\gamma]$ ab.

b) K ist eine Bijektion zwischen T_pM^{geom} und $\mathbb{R}^n$.

c) $K(\gamma)$ transformiert sich unter Kartenwechsel wie ein Tangentialvektor, d.h. K liefert eine Identifikation von T_pM^{geom} und dem Tangentialraum T_pM.

2. Ein allgemeiner Zusammenhang auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M)\\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

(i) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
(ii) $\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f \nabla_X Y$

für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$.
Sei nun ∇_o ein gegebener Zusammenhang und $\mathcal{Z}(M)$ die Menge aller Zusammenhänge auf M. Zeige: Wir haben eine Bijektion

$$\mathcal{T}^{2,1}(M) \to \mathcal{Z}(M), \quad A \mapsto \nabla^A$$

mit $\nabla^A_X Y := \nabla^o_X Y + A(X,Y)$. Hier ist $\mathcal{T}^{2,1}(M)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2-1-Tensoren.

3. a) Finde eine explizite Formel für die Einbettung $f\colon [-1,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ eines Möbiusbandes als reguläre Fläche.

b) Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn alle Kartenwechsel Differentiale mit positiver Determinante haben. Zeige, daß das Möbiusband aus (a) nicht orientierbar ist.

4. Betrachte den Torus $\{(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, $0 < r < R$ und berechne seinen Flächeninhalt und die Gaußkrümmungsfunktion K.

Rückgabe: Montag 17.12.07 in der Übung.