Aufgabenblatt 11

Die Abgabe ist freiwillig. Alle erreichbaren Punkte dieser Serie sind Zusatzpunkte. Die Abgabe erfolgt am Montag, dem 07.07.25 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren affin invariant ist, d.h. dass das Newton-Verfahren für eine Funktion $F : G \to \mathbb{R}^n$ mit Startwert x_0 genau die gleiche Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liefert wie das Newton-Verfahren für die Funktion $\tilde{F} : G \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\tilde{F}(x) = AF(x)$ für eine beliebige reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 2

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \\ x\cdot v_1 = 0}} \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}.$$

Aufgabe 3

Führen Sie 5 Schritte der Potenzmethode mit dem Anfangsvektor

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch und beobachten Sie die Größen $\|\tilde{z}_k\|_2$ und $z_k^\top Az_k$ für die Matrizen

(a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -6 & -22 & 59 \\ -4 & -6 & 22 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie jeweils die k-te Iterierte der Potenzmethode für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ 2 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit den Startvektoren $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und diskutieren Sie die Gültigkeit der Voraussetzungen des Konvergenzresultats.