Aufgabenblatt 10

Abgabe am Montag, dem 30.06.25 vor der Vorlesung.

Der Fachschaftsrat Mathematik lädt herzlich zum Sommerfest am 26. Juni ein! Die Feier findet von 15-22 Uhr am Richard-Wagner-Hain statt und lockt mit einem spannenden Volleyballturnier, coolen DIY-Aktionen wie Henna-Tattoos und Seedballs, sowie guter Musik, Snacks und Sommerlaune pur.

Aufgabe 1
Sei $D := [0,1] \subset \mathbb{R}$. Überprüfen Sie für folgende $\Phi(x)$, ob das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert.

(a) $\Phi(x) := 2e^x - 4$

(b) $\Phi(x) := \log((x/2) + 2)$

Aufgabe 2 (Divergente Newton-Iteration)
Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Newton-Iterierte zyklisch die Werte $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ und jeweils die Funktionswerte $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1$ annimmt.

Aufgabe 3 (Globale Konvergenz des Newton-Verfahrens)
Die Funktion $f \in C^1([a,b])$ sei streng monoton wachsend und konvex mit $f(a) < 0 < f(b)$. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert x_0 rechts der eindeutig bestimmten Nullstelle x, d.h. $x < x_0 < b$ die Näherungen x_k des Newton-Verfahrens monoton von rechts gegen x konvergieren.

Aufgabe 4 (Verfahren von Heron)
Das Verfahren von Heron approximiert die Quadratwurzel $a^{1/2}$ einer Zahl $a \geq 0$ durch die Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit der Funktion $\Phi(x) = (x + a/x)/2$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine Kontraktion im Intervall $((a/2)^{1/2}, \infty)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heron mit dem Newton-Verfahren für die Funktion $x \mapsto x^2 - a$ übereinstimmt und untersuchen Sie hinreichende Bedingungen für die lokale, quadratische Konvergenz des Verfahrens.