Aufgabenblatt 8

Abgabe am Montag, dem 16.06.25 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (optimale Wahl von Stützstellen auf beliebigem Intervall)
Berechnen Sie die optimalen Stützstellen $(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ im Sinne von

$$\min_{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}} \max_{x\in[a,b]} |\Pi_{j=0}^n (x - x_j)| = \max_{x\in[a,b]} |\Pi_{j=0}^n (x - t_j)|$$

für ein beliebiges (beschränktes) Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Berechnen Sie außerdem den Wert

$$\max_{x\in[a,b]} |\Pi_{j=0}^n (x - t_j)|.$$

Aufgabe 2 (Kubische Splines)
Es sei $\mathcal{T}_2$ die Partitionierung von $[0, 2]$ bezüglich der Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Es bezeichne $S_0^{3,2}(\mathcal{T}_2)$ den Raum der natürlichen kubischen Spline-Funktionen zu $\mathcal{T}_2$.

(a) Welche der folgenden Funktionen liegen in $S_0^{3,2}(\mathcal{T}_2)$?

(i) $f(x) = x^3 - x^2$ (ii) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$ (iii) $f(x) = \max\{0, x-1\}^3 - \frac{1}{2}x^3$

(b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S_0^{3,2}(\mathcal{T}_2)$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2'(x_0) = f'(x_0)$ und $s_2'(x_2) = f'(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 3 (Beweis von Satz 5.16 aus der Vorlesung)
Es sei $s_n \in S^{3,2}(\mathcal{T}_n)$ der interpolierende natürliche Spline zu den Stützstellen $x_0 < x_1 < ... < x_n$ mit Werten y_j, d.h. $s_n(x_j) = y_j$. Es seien $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$, $a_2^{(j)}$, $a_3^{(j)} \in \mathbb{R}$ so, dass

$$s_n|_{[x_j,x_{j+1}]}(x) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}(x - x_j) + a_2^{(j)}(x - x_j)^2 + a_3^{(j)}(x - x_j)^3.$$

Es sei $h_j := x_{j+1} - x_j$. Dann gilt

$$a_0^{(j)} = y_j, \quad a_3^{(j)} = \frac{a_2^{(j+1)} - a_2^{(j)}}{3h_j} \quad a_1^{(j)} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - h_j a_2^{(j)} - h_j^2 a_3^{(j)}$$

und die Koeffizienten $a_2^{(j)}$, $j = 0, 1, ..., n - 1$ lösen das LGS

$$a_2^{(0)} = 0, \quad a_2^{(n)} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{h_j}{3} a_2^{(j)} + \frac{2(h_{j+1} + h_j)}{3} a_2^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{3} a_2^{(j+2)} = \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

für $j = 0, ..., n - 2$.

Aufgabe 4 (Quadraturformel)

(a) Es sei Q eine Quadraturformel auf dem Interval $[a, b]$ mit Quadraturpunkten $(x_j)_{j=0,\dots,n}$ und Gewichten $(w_j)_{j=0,\dots,n}$. Leiten Sie durch eine Transformation eine Quadraturformel $\tilde{Q}$ auf dem Interval $[c, d]$ her, die den gleichen Exaktheitsgrad hat.

(b) Die Quadraturformel $Q : C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\dots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q+1$ ist.