Aufgabenblatt 7

Abgabe am Montag, dem 02.06.25 vor der Vorlesung.
Die Programmieraufgabe kann bis zum Mittwoch, dem 11.06.25 vor der Vorlesung auf der Moodle-Seite abgegeben werden.

Aufgabe 1 (Kondition von s.p.d Matrizen)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit (s.p.d.). Zeigen Sie

(a) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^2 ein Eigenwert von A^*A ist.

(b) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist.

(c) Es ist $\|A\|_2 = \lambda_{\max}$ für den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A.

(d) Es ist $\operatorname{cond}_2(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, wobei $\lambda_{\min}$ den betragskleinsten Eigenwert von A bezeichnet.

Aufgabe 2 (Beweis von Lemma 4.39 aus der Vorlesung)
Es seien T_n die Tschebyscheff-Polynome aus der Vorlesung. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $|T_n(t)| \leq 1$ für alle $t \in [-1, 1]$.

(b) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \qquad \text{für alle } t \in [-1, 1].$$

Insbesondere ist T_n ein Polynom n-ten Grades auf $[-1, 1]$ und für $n \geq 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}(t)$, wobei q_{n-1} ein Polynom $(n-1)$-ten Grades auf $[-1, 1]$ ist.

(c) Für $n \geq 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos(\frac{(j+1/2)\pi}{n})$ für $j = 0, 1, ..., n-1$ und die Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ mit

$$T_n(s_j) = \begin{cases} +1 & j \text{ gerade,} \\ -1 & j\text{ungerade.} \end{cases}$$

(d) Es gilt $T_n(t) = \frac{1}{2}\left((t + \sqrt{t^2-1})^n + (t - \sqrt{t^2-1})^n\right)$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Aufgabe 3 (Neville-Schema)
An einem 21. Dezember wurden folgende Tageslängen gemessen

Ort	Tageslänge	Lage
Berlin	7h39m	$52,5°$N
Rom	9h07m	$41,9°$N
Helsinki	5h49m	$60,2°$N
Minsk	7h23m	$53,9°$N
Marseille	8h58m	$43,3°$N
Santiago de Chile	14h20m	$-33,4°$N

Bestimmen Sie die Tageslänge in Leipzig ($51,3°$N) durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus.
Bemerkung: Wenn Sie von Hand rechnen, reicht vierstellige Dezimalrechnung.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 11.06.2025)

(a) Implementieren Sie das cg-Verfahren. Als Abbruchbedingung können Sie die Bedingung

$$\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-8}$$

wählen.

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieses Programms das lineare Gleichungssystem in der Methode `solve_linear_PDE` in der Datei `solve_PDE_1.jl` (statt dieses mit dem Backslash-Operator zu lösen). Vergleichen Sie die Zeiten, die Ihr Programm benötigt mit denen, die die LR-Zerlegung vom Aufgabenblatt 3, das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren vom Aufgabenblatt 5 benötigen.

Die Abgabe des Codes erfolgt auf der Moodle-Seite. Für den Aufgabenteil (b) genügt es, die Zeiten für $N = 3, \ldots, 5$ in einem .txt File anzugeben.