

Aufgabenblatt 6

Abgabe am Montag, dem 26.05.25 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens)

Zeigen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren für eine stark diagonaldominante Matrix A bzw. für eine diagonaldominante, irreduzible Matrix A konvergiert. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

- (a) Zeigen Sie, dass die Iterationsmatrix $G = (D + L)^{-1}R$ die Gleichung $Gx = D^{-1}(Rx - LGx)$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ erfüllt.
- (b) Zeigen Sie induktiv, dass $|(Gx)_j| \leq \|x\|_\infty$ gilt, wobei die Ungleichung strikt ist, wenn A stark diagonaldominant und $x \neq 0$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass daraus für stark diagonaldominantes A die Konvergenz folgt.
- (d) Ist A diagonaldominant und irreduzibel, dann gehen Sie ähnlich wie in der Vorlesung im Beweis der Konvergenz des Jacobi-Verfahrens vor und unterteilen Sie die Indizes eines Eigenvektors x mit $\|x\|_\infty = 1$ in diejenigen, für die $|x_j| = 1$ gilt, und den Rest. Schließen Sie nun, dass aus der Irreduzibilität von A folgt, dass $J^c = \emptyset$ und aus der strikten Ungleichung in der Definition der Diagonaldominanz folgt nun die Behauptung.

Aufgabe 2 (Beweis von Lemma IV.26 aus der Vorlesung)

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d. (symmetrisch positiv definit) und $b \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Ax = b \Leftrightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^n} f(z),$$

wobei das Energiefunktional durch $f(z) := \frac{1}{2}z^\top Az - z^\top b$ definiert ist.

Aufgabe 3 (Vorkonditioniertes cg-Verfahren)

Gesucht ist eine Lösung x^* des linearen Gleichungssystems $Ax^* = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind. Es sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und es sei $B = CC^\top$ mit einer invertierbaren Matrix C .

- (a) Substituieren Sie $y^* = C^{-1}x^*$ und leiten Sie damit $\tilde{A}$ und $\tilde{b}$ so her, dass das Energiefunktional

$$\tilde{f}(y) := \frac{1}{2}y^\top \tilde{A}y - \tilde{b}^\top y$$

von y^* minimiert wird.

- (b) Es bezeichnen nun $\tilde{r}_k$ und $\tilde{d}_k$ das Residuum und die Abstiegsrichtung im cg-Verfahren bezüglich des modifizierten Problems. Substituieren Sie nun

$$\begin{aligned} y_k &= C^{-1}x_k, \\ \tilde{r}_k &= C^\top r_k, \\ \tilde{d}_k &= C^\top d_k \end{aligned}$$

und schreiben Sie das cg-Verfahren zur Lösung von $\tilde{A}y = \tilde{b}$ so um, dass nur noch die Matrix B vorkommt, aber die Matrix C nicht mehr bekannt sein muss.

- (c) Zeigen Sie für das hergeleitete Verfahren eine Fehlerabschätzung, wobei Sie die Fehlerabschätzung für das cg-Verfahren aus der Vorlesung benutzen können.

Aufgabe 4 (Vorkonditionierung einer Matrix)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2^{n-4} & 2^{n-2} & 2^{n-3} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{n-3} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Kondition von A durch $10 \cdot 2^{n-3}$ beschränkt ist.
- (b) Definieren Sie eine Diagonalmatrix D derart, dass die Kondition von $D^{-1}A$ durch 7 beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Kondition einer symmetrisch positiv definiten Matrix der Quotient aus dem betragsmäßig größten und dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert ist.