

Aufgabenblatt 5

Abgabe am Montag, dem 19.05.25 vor der Vorlesung.

Die Programmieraufgabe kann bis zum Montag, dem 26.05.25 vor der Vorlesung auf der Moodle-Seite abgegeben werden

Aufgabe 1 (Householder-Verfahren)

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Householder-Verfahren.

Aufgabe 2 (Givens-Rotationen)

Es seien $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$ gegeben. Definiere zu $1 \leq k < j \leq m$ die *Givens-Rotation*

$$Q_{jk} := \begin{pmatrix} I_{(k-1) \times (k-1)} & & & & \\ & c & & & s \\ & & I_{(j-k-1) \times (j-k-1)} & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I_{(m-j) \times (m-j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass Q_{jk} eine orthogonale Matrix ist.
- (b) Bestimmen Sie c, s und $r \geq 0$ so, dass für einen gegebenen Vektor $x = (x_1, x_2)^\top$

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl von j , k , c und s eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \star & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \star & \dots & \dots & \dots & \star \\ \vdots & & 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & & \vdots & a_{(j-1),k} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{j,k} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$$

in eine Matrix der obigen Form mit $a_{j,k} = 0$ überführt werden kann.

Aufgabe 3 (Spektralradius) (a) Zeigen Sie, dass der Spektralradius $\rho(\bullet)$ eine Norm auf den Hermiteschen Matrizen ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Spektralradius keine Norm ist auf dem Raum aller Matrizen. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass der Spektralradius nicht positiv definit ist.)

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 26.05.2025) (a) Implementieren Sie das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren. Als Abbruchbedingung können Sie die Bedingung

$$\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-8}$$

wählen.

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Programme das lineare Gleichungssystem in der Methode `solve_linear_ODE_implicit` in der Datei `solve_ODE_1.jl` (statt dieses mit dem Backslash-Operator zu lösen). Vergleichen Sie die Zeiten, die Ihre Programm benötigen mit denen, die die LR-Zerlegung vom Aufgabenblatt 3 und der Backslash Operator benötigen.

Die Abgabe des Codes erfolgt auf der Moodle-Seite. Für die Aufgabenteil (b) genügt es, die Zeiten für $N = 3, \dots, 5$ in einem .txt File anzugeben.