Jun. Prof. Dr. M. Schedensack
Florian Schneider

Aufgabenblatt 4

Abgabe am Montag, dem 12.05.25 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1
Man zeige:

(a) Für $|\varepsilon| \leq \texttt{eps} < 1$ gilt

$$(1+\varepsilon)^{-1} = 1 + \bar{\varepsilon} \text{ mit } |\bar{\varepsilon}| \leq \frac{\texttt{eps}}{1-\texttt{eps}}.$$

(b) Für $|\varepsilon_i| \leq \texttt{eps}/(1-\texttt{eps})$, $i = 1, \ldots, k$, gilt

$$\prod_{i=1}^{k}(1+\varepsilon_i) = 1 + \bar{\varepsilon} \text{ mit } |\bar{\varepsilon}| \leq \frac{k\,\texttt{eps}}{1-k\,\texttt{eps}},$$

solange nur $k\,\texttt{eps} < 1$ ist.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Aufgabe $\phi(x) = (1/x) - (1/(x+1))$ für betragsmäßig große Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gut konditioniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren $\widetilde{\phi}(x) = (1/x) - (1/(x+1))$ instabil ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Verfahren $\widetilde{\phi}(x) = 1/(x(x+1))$ stabil ist.

Hinweis: Verwenden Sie dabei Aufgabe 1 und die Approximation

$$1/(1-\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Aufgabe 3
In einem physikalischen Versuch sollen die Parameter $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ einer Parabel der Form

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

ermittelt werden. Folgende Messwerte liegen vor

x=	2	3	4	5
y=	90	75	65	40

(a) Stellen Sie ein (ggfs. überbestimmtes) LGS für p auf.

(b) Bestimmen Sie die optimalen Parameter $\widetilde{p} = (\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}) \in \mathbb{R}^3$ im Sinne der Kleinste-Quadrate-Lösung. (Auftretende LGS können Sie mit dem Rechner lösen).

(c) Stellen Sie die ermittelte Parabel graphisch dar. Zeichnen Sie auch die Messwerte in das Diagramm ein.

Aufgabe 4 (Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben mit $A = QR$ mit orthogonaler Matrix Q und verallgemeinerter rechter oberer Dreiecksmatrix R. Zeigen Sie, dass die Matrix R eindeutig ist, wenn man zusätzlich fordert, dass alle Diagonalelemente von R positiv sind. Zeigen Sie, dass dann auch Q eindeutig ist, wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.