

# Aufgabenblatt 3

Abgabe am Montag, dem 05.05.25 vor der Vorlesung.

Die Programmieraufgabe kann bis zum Montag, dem 12.05.25 vor der Vorlesung auf der Moodle-Seite abgegeben werden

**Aufgabe 1** (Normäquivalenz in endlich dimensionalen Vektorräumen, Beweis von Satz 3.10 aus der Vorlesung)

Es seien  $\|\bullet\|$  und  $\|\bullet\|'$  zwei Normen auf  $\mathbb{K}^n$ . Dann gibt es  $0 < c \leq C < \infty$  derart, dass

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : \quad c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|.$$

**Aufgabe 2** (Beispiele zu Normen, Beispiel 3.14 aus Vorlesung)

Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Die Frobeniusnorm auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$  ist mit  $\|\bullet\|_2$  auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$  verträglich, aber nicht die von  $\|\bullet\|_2$  erzeugte Norm.
- (b) Die Operatornorm zu  $\|\bullet\|_\infty$  auf  $\mathbb{K}^{n \times m}$  ist die Norm der „maximalen Zeilensumme“:

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|.$$

- (c) Die Operatornorm zu  $\|\bullet\|_1$  auf  $\mathbb{K}^{n \times m}$  ist die Norm der „maximalen Spaltensumme“:

$$\|A\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |A_{j,k}|.$$

**Aufgabe 3**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar und  $\|\bullet\|$  eine von der Vektornorm  $\|\bullet\|$  induzierte Operatornorm auf  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Zeigen Sie, dass  $\|A^{-1}\| = (\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|)^{-1}$  und  $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$  gelten.

#### Aufgabe 4 (Programmieraufgabe)

- (a) Ergänzen Sie die Methode `LR_decomposition` im Programm `solve_LGS_gauss.jl`, sodass es die LR-Zerlegung umsetzt. Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution sind bereits in `solve_LGS_gauss.jl` enthalten.
- (b) Lösen Sie mit Hilfe dieses Programms das lineare Gleichungssystem in der Methode `solve_linear_ODE_implicit` in der Datei `solve_ODE_1.jl` (statt dieses mit dem Backslash-Operator zu lösen).
- (c) Bestimmen Sie mit dem Befehle `nnz` die Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der Steifigkeitsmatrix, in  $L$  und in  $R$ .
- (d) Vergleichen Sie die Zeiten, die Ihr Programm benötigt mit denen, die der Backslash Operator benötigt.

Die Abgabe des Codes erfolgt auf der Moodle-Seite. Für die Aufgabenteile (c) und (d) genügt es, die Nicht-Null-Einträge bzw. die Zeiten für  $N = 3, \dots, 5$  in einem `.txt` File anzugeben.