Aufgabenblatt 2

Abgabe am Mittwoch, dem 23.04.25 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Cholesky-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie

(a) Der erste Schritt der LR-Zerlegung ist ohne Pivotsuche durchführbar.

(b) Es sei L_1 die Matrix aus dem ersten Schritt der LR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass

$$L_1 A L_1^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $B^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $B^{(2)}$ symmetrisch positiv definit ist.

(d) Schließen Sie, dass die LR-Zerlegung für symmetrisch positiv definite Matrizen ohne Pivotsuche durchführbar ist und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$A = LDL^\top.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 des ersten Aufgabenblattes.

Aufgabe 2 (Determinante von Matrizen)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit einer LR-Zerlegung $A = LR$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen und einer oberen Dreiecksmatrix R.

(a) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Determinante $\det(A)$ her.

(b) Vergleichen Sie die Anzahl an arithmetischen Operationen für die drei folgenden Vorgehensweisen zur Berechnung der Determinante von A:

(i) Berechnung der LR-Zerlegung plus die Auswertung der von Ihnen hergeleiteten Formel

(ii) Auswertung der Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$$

(iii) Auswertung der Entwicklungsformel nach der k-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a_{jk}\, \det(A_{jk}),$$

wobei A_{jk} die $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte von A entsteht. Hierbei soll die Berechnung der Determinante der entstehenden Untermatrizen A_{jk} iterativ wieder mit der Entwicklungsformel geschehen.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der LR-Zerlegung)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre (d.h. invertierbare) Matrix mit einer LR-Zerlegung $A = LR$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen und einer oberen Dreiecksmatrix R. Zeigen Sie, dass diese Zerlegung eindeutig ist.

Aufgabe 4 (Maschinenzahlen)

(a) Vergleichen Sie die Festpunktzahlen mit $m_1 = 1$ und $m_2 = 2$ und die Gleitkommazahlen zur Basis $b = 10$ mit Mantissenlänge 1 und Exponent $e \in \{-1, 0, 1\}$.

   (i) Was ist jeweils die kleinste positive und die größte positive darstellbare Zahl?

   (ii) Wie viele darstellbare positive Zahlen gibt es jeweils?

   (iii) Skizzieren Sie die Verteilung der darstellbaren positiven Zahlen auf einem Zahlenstrahl.

(b) Betrachten Sie die Maschinenzahlen $\pm m b^e$ mit Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, Exponent $-L \leq e \leq U$ und Mantisse m mit Mantissenlänge r wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass für alle x aus dem zulässigen Bereich der darstellbaren Maschinenzahlen gilt:

$$\begin{aligned}
|x - \mathrm{rd}(x)| &= \min_{y \in A} |x - y|, \\
|x - \mathrm{rd}(x)| &\leq \frac{1}{2} b^{-r} b^{e}, \\
\frac{|x - \mathrm{rd}(x)|}{|x|} &\leq \frac{1}{2} b^{1-r}.
\end{aligned}$$