



Numerisches Praktikum

WS 2024

Projekt: Numerische Berechnung des Logarithmus (empfohlene Gruppengröße: 2)

Approximieren Sie numerisch $\log(x^*)$ für $x^* = 2, 3, \dots, 10$, indem Sie die folgenden Algorithmen anwenden

- Potenzreihen-Ansatz: Berechnen Sie für $N \in \mathbb{N}$ (numerisch) die Summen

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{(x^* - 1)^k}{k} \quad \text{und} \quad - \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\left(-\frac{x^*-1}{x^*}\right)^k}{k}.$$

- Quadratur zur Berechnung der Stammfunktion von $1/x$: Implementieren Sie eine zusammengesetzte (summierte) Quadraturformel (siehe auch [Her11, Abschnitt 8.2.2]) Ihrer Wahl aus der Vorlesung, um

$$\int_1^{x^*} \frac{1}{t} dt$$

zu approximieren.

- Logarithmus als Grenzwert: Benutzen Sie

$$\log(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x^*} - 1),$$

um durch

$$N(\sqrt[N]{x^*} - 1)$$

eine Näherung für $\log(x^*)$ zu berechnen. Hierfür sollen Sie *keine* python-Funktion für die Berechnung von $\sqrt[N]{x^*}$ benutzen, sondern das Newton-Verfahren implementieren, um $\sqrt[N]{x^*}$ als Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^N - x^*$$

zu approximieren.

1. Implementieren Sie die drei Verfahren.
2. Testen Sie beim dritten Verfahren, wie viele Schritte beim Newton-Verfahren (abhängig von N) ausgeführt werden müssen, damit der Fehler von

$$N(y_K - 1) \quad \text{und} \quad N(y_{K+1} - 1)$$

(wobei y_K die Ausgabe des Newton-Verfahrens für K Schritte bezeichne), sich nicht wesentlich unterscheiden.

3. Erstellen Sie ein Diagramm, in dem Sie die Fehler $|\log(x^*) - x_k|$ gegen die Anzahl der Schritte (Anzahl der Summanden beim Potenzreihen-Ansatz) auftragen. Benutzen Sie für die summierte Quadraturformel 2^k Teilintervalle und tragen Sie den Fehler gegen k auf. Tragen Sie beim dritten Verfahren die Fehler gegen die Anzahl der Schritte des Newton-Verfahrens, die Sie für das jeweilige N bestimmt haben, auf.

Tragen Sie in dem Diagramm die y-Werte (d.h. den Fehler) logarithmisch auf (z.B. `semilogy` in matlab oder python). Vergleichen Sie die drei Verfahren und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Literatur

- [Her11] Martin Hermann. *Numerische Mathematik*. München: Oldenbourg Verlag, 3rd revised and expanded ed. edition, 2011.