



Numerisches Praktikum

WS 2024

Projekt: Vergleich von expliziten und impliziten Finite-Differenzen-Verfahren für die Wellengleichung in 1d (empfohlene Gruppengröße: 4)

Es sei $T > 0$ und $u_0 \in \mathcal{C}([0, 1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$ und $v_0 \in \mathcal{C}([0, 1])$. Man betrachte die Wellengleichung: Finde $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ (Anfangsbedingungen), $u(0, t) = u(1, t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ (Randbedingung) und

$$\ddot{u}(x, t) - u''(x, t) = 0,$$

wobei $\dot{u}$ die Ableitung von u nach der Zeit t und u' die Ableitung von u nach dem Ort x bezeichne. Eine Eigenschaft von Lösungen zur Wellengleichung ist, dass diese die Energie

$$E := \frac{1}{2} \int_0^1 ((\dot{u}(t, x))^2 + (u'(t, x))^2) dx$$

erhalten, d.h. dass E konstant bezüglich t ist. Die Funktion

$$u(t, x) = \cos(\pi t) \sin(\pi x) \tag{1}$$

ist eine Lösung dieser Gleichung für $u_0(x) = \sin(\pi x)$ und $v_0(x) = 0$.

Es seien $\Delta t > 0$ eine Zeitschrittweite und $\Delta x > 0$ eine Schrittweite im Ort und es sei $J := 1/\Delta x \in \mathbb{N}$ und $K := T/\Delta t \in \mathbb{N}$. Setze $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.3.4]) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} U_j^0 &= u_0(j\Delta x) & \text{f. a. } j = 0, \dots, J, \\ U_0^{k+1} &= U_J^{k+1} = 0 & \text{f. a. } k = 1, \dots, K-1 \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} U_j^1 &= (1 - \mu^2)U_j^0 + \mu^2(U_{j+1}^0 + U_{j-1}^0)/2 + \Delta t v_0(j\Delta x), \\ \frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} &= \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

für alle $j = 1, \dots, J-1$ und $k = 1, \dots, K-1$. Ein (naives) implizites Verfahren ist gegeben durch (2) und

$$\begin{aligned} (2 + 2\mu^2)U_j^1 - \mu^2(U_{j+1}^1 + U_{j-1}^1) &= 2U_j^0 + 2\Delta t v_0(j\Delta x) & \text{f. a. } j = 1, \dots, J-1, \\ \frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} &= \frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} & \text{f. a. } j = 1, \dots, J-1, \\ & & k = 1, \dots, K-1. \end{aligned} \tag{3}$$

Ein zweites implizites Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.3.5]) ist gegeben durch (2) und

$$\begin{aligned}
(2 + \mu^2)U_j^1 - \frac{\mu^2}{2}(U_{j+1}^1 + U_{j-1}^1) \\
= (2 - \mu^2)U_j^0 + \frac{\mu^2}{2}(U_{j+1}^0 + U_{j-1}^0) \\
- \Delta t \frac{\mu^2}{4}(v_0((j+1)\Delta x) - 2v_0(j\Delta x) + v_0((j-1)\Delta x)), \\
\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + 2 \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\
\left. + \frac{U_{j+1}^{k-1} - 2U_j^{k-1} + U_{j-1}^{k-1}}{(\Delta x)^2} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

für alle $j = 1, \dots, J-1$ und $k = 1, \dots, K-1$. In beiden impliziten Verfahren kann U_j^{k+1} nicht direkt aus den Vektoren U^k und U^{k-1} berechnet werden, sondern es muss in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Definiere die Matrizen $A, B, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\mu^2 & 2\mu^2 \end{pmatrix}$$

und

$$B := I + A, \quad C_1 := I + \frac{1}{4}A, \quad C_2 := 2I - \frac{1}{2}A, \quad C_3 := -I - \frac{1}{4}A,$$

wobei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$ bezeichnet. Dann kann (3) geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
(2I + A)U^1 &= 2U^0 + 2\Delta t V, \\
BU^{k+1} &= 2U^k - U^{k-1},
\end{aligned}$$

wobei $U^k = (U_1^k, \dots, U_{J-1}^k)$ und $V = (v_0(\Delta x), v_0(2\Delta x), \dots, v_0((J-1)\Delta x))$. Die Vorschrift (4) im zweiten impliziten Verfahren kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
2C_1U^1 &= C_2U^0 + \frac{\Delta t}{4}AV, \\
C_1U^{k+1} &= C_2U^k + C_3U^{k-1}.
\end{aligned}$$

1. Implementieren Sie das explizite und beide impliziten Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie die Matrizen A, B, C_1, C_2, C_3 als *sparse*-Matrizen implementieren. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`. Berechnen Sie mit allen drei Verfahren Approximationen der Lösung (1) für $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001$ und $\Delta x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Für welche Verfahren und für welche Werte von Δt und Δx „explodieren“ die berechneten Lösungen?

2. Berechnen Sie den ℓ^∞ -Fehler

$$\sup_{j=1,\dots,J; k=0,\dots,K} |u(k\Delta t, j\Delta x) - U_j^k|$$

für die in 1. genannten Werte von Δt und Δx und vergleichen Sie die drei Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler einmal gegen die Ortsschrittweite Δx auftragen und einmal gegen die Zeitschrittweite Δt . Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten?

3. Überprüfen Sie für die drei Verfahren, ob die (diskreten) Energien

$$E^{k+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_{j+1}^{k+1} - U_j^{k+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{U_{j+1}^k - U_j^k}{\Delta x} \right),$$

$$\tilde{E}^{k+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_j^{k+1} - U_{j-1}^{k+1} + U_j^k - U_{j-1}^k}{2\Delta x} \right)^2$$

erhalten bleiben. Kann man dies auch der diskreten Lösung ansehen?

Literatur

- [Bar16] Sören Bartels. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 64 of *Texts Appl. Math.* Cham: Springer, 2016.