



Numerisches Praktikum

WS 2024

Projekt: Vergleich von explizitem und implizitem Finite-Differenzen-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung in 1d (empfohlene Gruppengröße: 4)

Es sei $T > 0$ und $u_0 \in \mathcal{C}([0, 1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Man betrachte die Wärmeleitungsgleichung: Finde $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, 0) = u_0(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ (Anfangsbedingung), $u(0, t) = u(1, t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ (Randbedingung) und

$$\dot{u}(x, t) - u''(x, t) = 0,$$

wobei $\dot{u}$ die Ableitung von u nach der Zeit t und u' die Ableitung von u nach dem Ort x bezeichne. Für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind die sogenannten Energien

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u(t, x)^2 dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t, x))^2 dx$$

monoton fallend in t . Die Funktion

$$u(t, x) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x) \tag{1}$$

ist eine Lösung dieser Gleichung für $u_0(x) = \sin(\pi x)$.

Es seien $\Delta t > 0$ eine Zeitschrittweite und $\Delta x > 0$ eine Schrittweite im Ort und es sei $J := 1/\Delta x \in \mathbb{N}$ und $K := T/\Delta t \in \mathbb{N}$. Ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.2.4]) ist gegeben durch $U_j^0 = u_0(j\Delta x)$ für alle $j = 0, \dots, J$ und $U_0^k = U_J^k = 0$ und

$$\frac{1}{\Delta t}(U_j^{k+1} - U_j^k) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_{j-1}^k - 2U_j^k + U_{j+1}^k) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, J-1 \text{ und } k = 1, \dots, K.$$

Ein implizites Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.2.5]) ist gegeben durch $U_j^0 = u_0(j\Delta x)$ für alle $j = 0, \dots, J$ und $U_0^k = U_J^k = 0$ und

$$\frac{1}{\Delta t}(U_j^{k+1} - U_j^k) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_{j-1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j+1}^{k+1}) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, J-1 \text{ und } k = 1, \dots, K.$$

In diesem Verfahren, kann U_j^{k+1} nicht direkt aus dem Vektor U^k berechnet werden, sondern es muss in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Definiere $\lambda := \Delta t/(\Delta x)^2$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}.$$

Das implizite Verfahren ist dann äquivalent zu

$$AU^{k+1} = U^k,$$

wobei $U^k = (U_1^k, \dots, U_{J-1}^k)$.

1. Implementieren Sie das explizite und das implizite Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie A als *sparse*-Matrix implementieren. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`. Berechnen Sie damit Approximationen der Lösung (1) für $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ und $\Delta x = 0.1, 0.01$ mit beiden Verfahren. Für welche Werte von Δt und Δx und für welche Verfahren „explodieren“ die berechneten Lösungen?
2. Es bezeichne $u_j^k := u(k\Delta t, j\Delta x)$. Berechnen Sie den L^∞ -Fehler, den (diskreten) L^2 -Fehler und den (diskreten) L^2 - H^1 -Fehler

$$\begin{aligned} \|u - U\|_\infty &:= \sup_{j=1, \dots, J; k=0, \dots, K} |u_j^k - U_j^k|, \\ \|u - U\|_{h, L^2(L^2)} &:= \sqrt{\sum_{k=0}^K \Delta t \sum_{j=1}^J \Delta x (u_j^k - U_j^k)^2}, \\ \|u - U\|_{h, L^2(H^1)} &:= \sqrt{\sum_{k=0}^K \Delta t \sum_{j=1}^J \Delta x \left| \frac{(u_j^k - U_j^k) - (u_{j-1}^k - U_{j-1}^k)}{\Delta x} \right|^2} \end{aligned}$$

für die in 1. genannten Werte von Δt und Δx und vergleichen Sie die beiden Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler einmal gegen die Ortschaftweite Δx auftragen und einmal gegen die Zeitschrittweite Δt . Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten?

3. Überprüfen Sie für beide Verfahren, ob die (diskreten) Energien

$$\sum_{j=1}^J \Delta x (U_j^k)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^J \Delta x \left| \frac{U_j^k - U_{j-1}^k}{\Delta x} \right|^2$$

monoton fallend sind.

Literatur

- [Bar16] Sören Bartels. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 64 of *Texts Appl. Math.* Cham: Springer, 2016.