UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

Numerisches Praktikum

WS 2024

Projekt: Die Konvektions-Diffusions-Gleichung in 1d auf nicht-uniformen Gittern
(empfohlene Gruppengröße: 3 bzw. 4)

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung lautet

$$-\varepsilon u'' + u' = 1. \tag{1}$$

Beim zugehörigen Randwertproblem wird eine Lösung $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$ für die Gleichung (1) gesucht. Typische Lösungen zu dieser Gleichung entwickeln steile Randschichten für kleine Werte von ε. Eine exakte Lösung ist durch

$$u(x) = \frac{e^{(x-1)/\varepsilon} - 1}{e^{-1/\varepsilon} - 1} + x - 1$$

gegeben.
In diesem Projekt soll ein Finites-Differenzen-Verfahren auf verschiedenen Gittern verglichen werden, die gegeben sind durch die Punkte $(x_j)_{j=0,\dots,N}$ mit

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Ein Finite-Elemente-Verfahren versucht $u(x_j)$ durch U_j für $j = 0, \dots, N$ zu approximieren. Auf einem gegebenen Gitter betrachten wir das Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [RST08, Abschnitt 2.1.2]), das gegeben ist durch $U_0 = U_N = 0$ und

$$-2\varepsilon \left(\frac{U_{j+1}}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_j)} - \frac{U_j}{h_j h_{j+1}} + \frac{U_{j-1}}{h_j(h_{j+1} + h_j)} \right) + \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{h_j + h_{j+1}} = 1$$

für alle $j = 1, \dots, N-1$, wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$.
Die (Band-)Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ seien definiert durch

$$A_{jk} = \begin{cases} 2(h_j h_{j+1})^{-1} & \text{wenn } k = j, \\ 2(h_j(h_j + h_{j+1}))^{-1} & \text{wenn } k = j-1, \\ 2(h_{j+1}(h_j + h_{j+1})^{-1} & \text{wenn } k = j+1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$B_{jk} = \begin{cases} (h_j + h_{j+1})^{-1} & \text{wenn } k = j+2, \\ -(h_j + h_{j+1})^{-1} & \text{wenn } k = j-2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze $F = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Dann ist das Finite-Differenzen-Verfahren äquivalent zu

$$(\varepsilon A + B)\, U = F,$$

wobei $U = (U_1, \dots, U_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$.
Die hier betrachteten Gitter sind durch eine Gitter-erzeugende Funktion $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ definiert, nämlich durch $x_j = \lambda(j/N)$ für $j = 1, \dots, N-1$. Betrachtet werden sollen uniforme Gitter, d.h.

$$\lambda_1(s) = s,$$

Bakhvalov-type Gitter [RST08, S.119f], d.h. für wählbare Parameter $A > 0$ und $0 < q < 1$

$$\lambda_2(s) = \begin{cases} \psi(s) := 1 + A\varepsilon \ln\left(1 - \frac{1-s}{q}\right) & \text{wenn } 1 - \tau \le s \le 1, \\ \pi(s) := \psi(1-\tau) + (s - 1 + \tau)\psi'(1-\tau) & \text{wenn } 0 \le s \le 1 - \tau, \end{cases}$$

wobei $\tau = q - A\varepsilon$, und Shishkin-Gitter [RST08, S. 127f], d.h.

$$\lambda_3(s) = \begin{cases} \frac{s}{2-2\sigma} & \text{wenn } 0 \le s \le 1 - \sigma, \\ \frac{s}{2\sigma} + 1 - \frac{1}{2\sigma} & \text{wenn } 1 - \sigma \le s \le 1, \end{cases}$$

wobei $\sigma = 2\varepsilon \ln(N)$.

1. Implementieren Sie die drei Gitter, die durch λ_j, $j = 1, 2, 3$ erzeugt werden. Implementieren Sie außerdem das oben definierte Finite-Differenzen-Verfahren für allgemeine Gitter. Beachten Sie dabei, dass Sie die Matrizen A und B als *sparse*-Matrizen erstellen. Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`.

2. Führen Sie numerische Tests durch für die Parameter $\varepsilon = 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005$ und für die drei oben definierten Gitter-Typen. Testen Sie verschiedene Werte für die Parameter A und q für die Gitter vom Bakhvalov-Typ. Testen Sie außerdem neben dem Wert $\sigma = 2\varepsilon \ln(N)$ auch andere Werte für σ für die Shishkin-Gitter. Stellen Sie die exakte Lösung und die diskreten Lösungen für die Gitterweiten $N = 10$, $N = 100$ und $N = 1000$ graphisch dar. Vergleichen Sie die Lösungen auf den unterschiedlichen Gittern.

3. Setze $\hat{u} = (u(x_0), \dots, u(x_N))^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$. Berechnen Sie die Fehler

$$\|\hat{u} - U\|_{\ell^\infty}\,, \qquad \textit{(Gruppengröße 4)}$$

$$\|\hat{u} - U\|_{h,L^2} := \sqrt{\sum_{j=0}^{N} h_j\, |\hat{u}_j - U_j|^2}\,, \qquad \textit{(Gruppengröße 3 und 4)}$$

$$\|\hat{u} - U\|_{h,H^1} := \sqrt{\sum_{j=1}^{N} h_j \left| \frac{(\hat{u}_j - U_j) - (\hat{u}_{j-1} - U_{j-1})}{h_j} \right|^2} \qquad \textit{(Gruppengröße 4)}$$

für die in 2 genannten Werte von ε und Δx und vergleichen Sie die Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler gegen die Schrittweite Δx auftragen. Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten? Welche Vorasymptotik lässt sich beobachten?

Literatur

[RST08] Hans-Görg Roos, Martin Stynes, and Lutz Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion-reaction and flow problems*, volume 24 of *Springer Ser. Comput. Math.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2008.