UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

Numerisches Praktikum

WS 2024

Projekt: Finite Elemente für die Konvektions-Diffusions-Gleichung in 1d: SUPG
(empfohlene Gruppengröße: 2 bzw. 3)

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung lautet

$$-\varepsilon u'' + u' = 1. \tag{1}$$

Beim zugehörigen Randwertproblem wird eine Lösung $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$ für die Gleichung (1) gesucht. Typische Lösungen zu dieser Gleichung entwickeln steile Randschichten für kleine Werte von ε. Eine exakte Lösung ist durch

$$u(x) = \frac{e^{(x-1)/\varepsilon} - 1}{e^{-1/\varepsilon} - 1} + x - 1$$

gegeben.
Wir betrachten im folgenden die standard Finite-Elemente-Methode (FEM) [Bar16, Abschnitt 7.3.1] und die abgeänderte streamline upwind/Petrov–Galerkin Methode (SUPG) [Bar16, Abschnitt 7.3.2] für das obige Problem. Die SUPG addiert eine künstliche Diffusion zur Gleichung dazu, d.h. für ein gegebenes $\delta > 0$ sucht sie die Lösung zu

$$-(\varepsilon + \delta)u'' + u' = 1.$$

Es sei $N \in \mathbb{N}$, $\Delta x := 1/N$ und $x_j := j\Delta x$ für $j = 0, \dots, N$. Wir approximieren die Lösung u an den Stellen x_j für $j = 0, \dots, N$ durch $u(x_j) \approx U_j^{\mathrm{FEM}}$ für die standard FEM beziehungsweise durch $u(x_j) \approx U_j^{\mathrm{SUPG}}$ für die SUPG. Die Approximationen sind dann gegeben durch $U_0^{\mathrm{FEM}} = U_N^{\mathrm{FEM}} = U_0^{\mathrm{SUPG}} = U_N^{\mathrm{SUPG}} = 0$ und $U^{\mathrm{FEM}} = (U_1^{\mathrm{FEM}}, \dots, U_{N-1}^{\mathrm{FEM}})^\top$, $U^{\mathrm{SUPG}} = (U_1^{\mathrm{SUPG}}, \dots, U_{N-1}^{\mathrm{SUPG}})^\top$ sind dann gegeben durch die Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$(\varepsilon A + B)\, U^{\mathrm{FEM}} = F \qquad \text{und} \qquad ((\varepsilon + \delta)A + B)\, U^{\mathrm{SUPG}} = F.$$

Hierbei sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ und $F \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ definiert durch

$$A = \frac{1}{|\Delta x|} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$
B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
1 & 0 & -1 & \ddots & & & \vdots \\
0 & 1 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & -1 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & 1 & 0 & -1 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},
$$

und $F = |\Delta x|(1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{N-1}$.

1. Implemenieren Sie die beiden obigen Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie die Matrizen A und B als *sparse*-Matrizen erstellen. Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`.

2. Führen Sie numerische Tests durch für die Parameter $\varepsilon = 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005$. Wählen Sie für die SUPG für jedes ε den Parameter δ als $\delta = 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005$. Stellen Sie die exakte Lösung und die diskreten Lösungen für die Gitterweiten $N = 10$, $N = 100$ und $N = 1000$ und $N = 10000$ graphisch dar. Vergleichen Sie die beiden Verfahren für diese Wahl von Parametern.

3. Geben Sie eine Wahl von δ in Abhängigkeit von ε und $|\Delta x|$ an, die zu möglichst guten Lösungen führt.

4. *(Zusätzlich für Gruppengröße 3:)* Setze $\hat{u} = (u(x_0), \dots, u(x_N))^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$. Berechnen Sie die Fehler

$$
\begin{aligned}
&\|\hat{u} - U\|_{\ell^\infty} \, , \\
&\|\hat{u} - U\|_{h,L^2} := \sqrt{\Delta x}\|\hat{u} - U\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N} \Delta x \, |\hat{u}_j - U_j|^2} \, , \\
&\|\hat{u} - U\|_{h,H^1} := \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \Delta x \left| \frac{(\hat{u}_j - U_j) - (\hat{u}_{j-1} - U_{j-1})}{\Delta x} \right|^2}
\end{aligned}
$$

für die in 2 genannten Werte von ε und Δx und vergleichen Sie die drei Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler gegen die Schrittweite Δx auftragen. Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten? Welche Vorasymptotik lässt sich beobachten?

Literatur

[Bar16] Sören Bartels. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 64 of *Texts Appl. Math.* Cham: Springer, 2016.