Mittlere Trefferzeit

Definition 5.10 *Für $A \subset E$ heißt $k_i^A := E(T_A|X_0 = i)$* **mittlere Trefferzeit**.

Satz 5.7 *$k_i^A, i \in E$ ist die minimale nichtneg. Lösung von*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{für } i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A & \text{für } i \in A^c. \end{cases}$$

Lemma 5.3 *Falls $i, j \in \mathbb{E}$, $p_{ij} > 0$, $i \in A^c$, dann*

$$E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) = 1 + E(T_A|X_0 = j).$$

Bew: (Satz 5.7) *Falls $k_i^A = 0$ falls $i \in A$. Falls $i \in A^c$ ist $T_A \geq 1$ $P(.|X_0 = i)$- f.s.*

$$\begin{aligned} k_i^A = E(T_A|X_0 = i) &= \sum_{j \in E} E(T_A \mathbb{1}_{\{j\}}(X_1)|X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in E} E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in E} E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) p_{ij} \overset{\text{Lemma 5.3}}{=} \sum_{j \in E} p_{ij}(1 + E(T_A|X_0 = j)) \\ &= 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A. \end{aligned}$$

Bew: (Lemma 5.3)

Falls $j \in A$:
$E(T_A|X_0 = i, X_1 = j) = E(1|X_0 = i, X_1 = j) = 1 = 1 + E(T_A|X_0 = j)$.

Falls $j \in A^c$ und $E(T_A|X_0 = j) = \infty$:
$E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) \geq 1 + p_{ij} E(T_A|X_0 = j) = \infty$, *also Beh.*

Falls $j \in A$ und $E(T_A|X_0 = j) < \infty$:
$E(T_A|X_0 = i, X_1 = j) = \sum_{n \geq 2} n\, P(T_A = n|X_0 = i, X_1 = j)$ *und für $n \geq 2$*

$$\begin{aligned} P(T_A = n|X_0 = i, X_1 = j) \\ &= P(X_1 \in A^c, \ldots, X_{n-1} \in A^c, X_n \in A|X_0 = i, X_1 = j) \\ &\overset{\text{Lemma 5.2}}{=} P(X_0 \in A^c, \ldots, X_{n-2} \in A^c, X_{n-1} \in A|X_0 = j) \\ &= P(T_A = n - 1|X_0 = j) \end{aligned}$$

Bew: (Lem. 5.3, Forts.)

$$\Rightarrow E(T_A|X_0 = i, X_1 = j) = \sum_{n\geq 2} n\, P(T_A = (n-1)|X_0 = j)$$

$$= \sum_{n\geq 2}(n-1)\, P(T_A = (n-1)|X_0 = j) + \sum_{n\geq 2} P(T_A = n-1|X_0 = j)$$

$$= E(T_A|X_0 = j) + P(T_A < \infty|X_0 = j) = E(T_A|X_0 = j) + 1,$$

weil $E(T_A < \infty|X_0 = 1) < \infty \Rightarrow P(T_A < \infty|X_0 = i) = 1.$ □

Bsp. 5.3 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $p_{00} = 1$, $p_{12} = p_{23} = p$, $p_{10} = p_{21} = q$, $p_{33} = 1$, $p + q = 1$, $A = \{0, 3\}$.
$k_i := k_i^A$ *für* $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
$k_i = 0$ *für* $i = 0, 3$.
$k_i = 1 + pk_{i+1} + qk_{i-1}$ *für* $i = 1, 2$.
$\Rightarrow k_1 = 1 + pk_2$ *und* $k_2 = 1 + qk_1$
$\Rightarrow k_1 = \frac{1+p}{1-pq}$ *und* $k_2 = \frac{1+q}{1-pq}$.

Transienz und Rekurrenz

Definition 5.11 *Sei $(X_k)_k$ eine homog. Markov-Kette auf $(E, \mathcal{E})$.*
- *$i \in E$ heißt **rekurrent**, falls $P(X_n = i$ für unendl. viele $n) = 1$.*
- *$i \in E$ heißt **transient**, falls $P(X_n = i$ für unendl. viele $n) = 0$.*

Definition 5.12 *Für $A \subset E$ heißt $T_+^A := \inf\{k \geq 1 | X_k \in A\}$ **Eintrittszeit** von A.*

Bsp. 5.4 $E = \mathbb{N}_0$, $p_{i,i+1} = 1 \forall i$, $A = \{0\}$
$\Rightarrow T_A = 0$ *und* $T_+^A = \infty$ $P(.|X_0 = 0)$*-f.s.*

Definition 5.13 *Für $A = i$ setze $\tau_i := T_A^+$ bzw.*

$$\tau_i^{(k)} := \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \tau_i & \text{falls } k = 1 \\ \inf\{l \geq \tau_i^{(k-1)} + 1 | X_l = i\} & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}$$

*k-**te Eintrittszeit** sowie $S_i^{(k)} := \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)}$ k-**te Exkursion**.*

Vereinbarung Im folgenden $P_i(.) := P(.|X_0 = i)$
(Wahrscheinlichkeiten für die MK bei Start in $i \in E$.)

Lemma 5.4 *Es sei (X_k) eine homog. MK und $i \in E$, dann ist*

$$P(S_i^{(m=1)} < \infty | \tau_i^{(m)} < \infty|) = P_i(\tau_i < \infty).$$

Bew: *Für $k, l \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}
&P(S_i^{(m+1)} = l, \tau_i^{(m)} = k) = \\
&= P(\{\exists! k_1, \dots, k_{m-1} < k : X_{k_j} = i\} \\
&\qquad\qquad \cap \{X_k = i\} \cap \{X_j \neq i \forall j = k+1, \dots, k+l-1, X_{k+l} = i\}) \\
&= P(X_j \neq i \forall j = k+1, \dots, k+l-1, X_k = i | \{\exists! k_1, \dots, k_{m-1} < k : X_{k_j} \\
&\qquad \cap \{X_k = i\}) \cdot P(\{\exists! k_1, \dots, k_{m-1} < k : X_{k_j} = i\} \cap \{X_k = i\}) \\
&\overset{\text{Lemma 5.2}}{=} P(X_j \neq i \forall j = k+1, \dots, k+l-1, X_{k=l} = i | X_k = i) \\
&\qquad \cdot P(\{\exists! k_1, \dots, k_{m-1} < k : X_{k_j} = i\} \cap \{X_k = i\}) \\
&= P_i(\tau_i = l) \cdot P(\tau_i^{(m)} = k).
\end{aligned}$$

$$\overset{\sum_{k \in \mathbb{N}}}{\Longrightarrow} P(S_i^{(m+1)} = l, \tau_i^{(m)} < \infty) = P_i(\tau_i = l) \cdot P(\tau_i^{(m)} < \infty).$$

$$\Longrightarrow P(S_i^{(m+1)} = l | \tau_i^{(m)} < \infty) = P_i(\tau_i = l) \overset{\sum_{l \in \mathbb{N}}}{\Longrightarrow} \textit{Beh.} \qquad \square$$

Definition 5.14 $f_i := P_i(\tau_i < \infty)$
Wiederkehrwahrscheinlichkeit des Zustands $i \in E$.

Definition 5.15 *Für* $i \in \mathbb{E}$ *heißt* $V_i := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)$ **Aufenthaltszahl des Zustands** i.

Satz 5.8 *Unter* P_i *ist* V_i *geometrisch verteilt mit Parameter* $\rho = f_i$.

Bemerkung $Z \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *geometrisch verteilt mit Parameter* $\rho \in [0, 1]$

$$:\iff P(Z = m) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-\rho)\rho^{m-1} & \text{für } \rho < 1 \\ 0 & \text{für } \rho = 1 \end{array} \right\}, m \in \mathbb{N}.$$

sowie $P(Z = \infty) = 0$ *für* $\rho < 1$ *bzw.* $P(Z = \infty) = 1$ *für* $\rho = 1$.

$$:\iff P(Z > m) = \rho^m \text{ für } m \in \mathbb{N}_0.$$

Bew: (v. Satz 5.8)

Zeige $P_i(V_i > m) = f_i^m$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$ *durch Induktion:* $m = 0$*:*
Unter P_i *ist* $X_0 = i$ *f.s., d.h.* $P_i(V_i > 0) = 1 - f_i^0$.
Induktionsschritt $m \rightsquigarrow m+1$*:*
Unter P_i *ist* $\{V_i > m\} = \{V_i \geq m+1\} = \{\tau_i^{(m)} < \infty\}$ *fast sicher, da* $X_0 = i$ *f.s.*

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_i(V_i > (m+1)) &= P_i(\tau_i^{(m+1)} < \infty) \\ &= P(S_i^{(m)} < \infty | \tau_i^{(m+1)} < \infty) \cdot P(\tau_i^{(m+1)} < \infty) \\ &\overset{\text{Lemma 5.4}}{=} f_i \cdot P(\tau_i^{(m)} < \infty) \overset{\text{Ind. Beh.}}{=} f_i \cdot f_i^m = f_i^{m+1}. \end{aligned}$$

Korollar 5.1

- $i \in E$ *rekurrent* $\Leftrightarrow \sum_k (p^k)_{ii} = \infty \Leftrightarrow f_i = 1$
- $i \in E$ *transient* $\Leftrightarrow \sum_k (p^k)_{ii} < \infty \Leftrightarrow f_i < 1$.

Insbesondere ist jeder Zustand entweder transient oder rekurrent.

Bew:

$Z := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)$ *unter* P_i *geom. vert. mit Param.* $\rho = f_i$, *d.h.*
$E(Z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} E_i(\mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_{ii}^{(k)} < \infty \Leftrightarrow \rho := f_i < 1$
$\Leftrightarrow Z < \infty$ P_i*-f.s* $\Rightarrow P_i(X_k = i$ *für unendl. viele* $k) = 0$ *bzw.*
$E(Z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} E_i(\mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_{ii}^{(k)} = \infty \Leftrightarrow \rho := f_i = 1 \Leftrightarrow Z = \infty$ P_i*-f.s* $\Rightarrow P_i(X_k = i$ *für unendl. viele* $k) = 1$.
D.h. falls i *nicht rekurrent* $\Rightarrow \sum (p^k)_{ii} < \infty \Rightarrow i$ *transient.* $\square$

Beispiel – Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$

Definition 5.16 *(Symmetrische) Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$: Markov-Kette auf $E = \mathbb{Z}^d$, mit $p_{ij} = \frac{1}{2^d}$, falls i und j Nachbarpunkte in $\mathbb{Z}^d$.*

Satz 5.9 *Für $d = 1, 2$ ist jeder Zustand $i \in \mathbb{Z}^d$ rekurrent, in $d \geq 3$ ist jeder Zustand transient.*

Bew: (Skizze) *Wegen der Verschiebungsinvarianz von $\mathbb{Z}^d$ reicht es aus, den $i = 0 \in \mathbb{Z}^d$ zu betrachten:*

- *Falls $d = 1$:* $$P_{00}^k = \begin{cases} \binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^n & \text{falls } k = 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\overset{\text{Stirling'sche Formel}}{\Longrightarrow} \binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^n \simeq \frac{c}{\sqrt{n}}$ *für* $n \to \infty$, *d.h*
$\sum_k p_{00}^k \simeq c \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \Rightarrow 0$ *rekurrent.*

- *Falls $d = 2$: Gleichverteilung auf den Eckpunkten des Einheitsquadrates in $\mathbb{Z}^2$ ist die um $\frac{\pi}{4}$-gedrehte Gleichverteilung auf den Diagonalpunkten $\Rightarrow$ Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ entspricht $\frac{\pi}{4}$-Drehung von $\hat{X}_k = \binom{x_k}{y_k}$ mit (x_k) und (y_k) unabh. $\mathbb{Z}$-Irrfarten.*
$\Rightarrow P(X_k = 0) = P(x_k = 0, y_k = 0) = P(x_k = 0)P(y_k = 0) \simeq (\frac{1}{\sqrt{n}})^2. \Rightarrow \sum_k p_{00}^k \simeq \sum_n \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow 0$ *rekurrent in* $d = 2$.

- $d \geq 3$: $p_{00}^k \simeq (\frac{1}{\sqrt{n}})^d \Rightarrow \sum_k p_{00}^k \simeq \sum_n (\frac{1}{\sqrt{n}})^d < \infty$, *falls* $d \geq 3$
$\Rightarrow 0$ *transient für* $d \geq 3$.