# Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 9**

*Abgabe: Mittwoch, 18.12. vor der Vorlesung,*
bitte Namen, Immatrikulationsnummer und Übungsgruppe (Buchstabe A,B,,...) angeben!

9-1 Gegeben sind $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in K^3$ mit $v, w \neq 0$ und die dadurch bestimmten Linearformen $\omega, \eta \in (K^3)^*$ mit $\omega(x_1, x_2, x_3) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$ ; $\eta(x_1, x_2, x_3) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$. Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U = \{x \in K^3; \omega(x) = \eta(x) = 0\}.$$

9-2 Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen $V$ und $W$ mit der transponierten Abbildung $f^T : W^* \longrightarrow V^*$. Wenn $U \subset V$ ein Unterraum ist, dann heißt $U^0 = \{\omega \in V^*; \omega(x) = 0 \text{ für alle } x \in U\}$ der zu $U$ orthogonale Raum.

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{im} f^T \subset (\ker f)^0$.

(b) Wenn $V$ und $W$ endlich-dimensional sind, dann gilt: $\mathrm{im} f^T = (\ker f)^0$.

9-3 Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen $V$ und $W$ mit transponierter Abbildung $f^T : W^* \longrightarrow V^*$.

Zeigen Sie:

(a) Wenn $f$ surjektiv ist, dann ist $f^T$ injektiv.

(b) Wenn $f$ injektiv ist, dann ist $f^T$ surjektiv.

9-4 Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}[t]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten und die lineare Abbildung $D : \sum_{i\geq 0} a_i t^i \in \mathbb{R}[t] \longmapsto \sum_{i\geq 1} i a_i t^{i-1} \in \mathbb{R}[t]$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{i,j}$ dieser Abbildung bezüglich der Basis $(1, t, t^2, \ldots)$ von $\mathbb{R}[t]$.