

# Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben<sup>1</sup>, Blatt 3, 01.11.2018

3-1 Zeigen Sie: Wenn  $c : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine einfach geschlossene ebene Kurve ist mit Krümmung  $\kappa(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, a]$  dann gibt es zu jedem Einheitsvektor  $v \in \mathbb{R}^2$  genau ein  $t \in [0, a]$  mit  $e_1(t) = v$ .

3-2 Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve  $c : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit nirgends verschwindender Krümmung  $\kappa = \kappa(t)$  ist die *Evolute* durch

$$f(t) = c(t) + \frac{e_2(t)}{\kappa(t)}$$

erklärt. Bestimmen Sie die Evolute der Parabel  $c(t) = (t, t^2)$  und skizzieren Sie die Evolute.

3-3 Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit Torsion  $\tau$  und mit positiver Krümmung  $\kappa$  heißt *Böschungslinie*, wenn die Funktion  $\tau/\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine konstante Funktion ist. Zeigen Sie, dass  $c$  eine Böschungslinie ist genau dann, wenn es einen Einheitsvektor  $u \in \mathbb{R}^3$  gibt, so dass die Funktion  $\langle u, e_1 \rangle : I \rightarrow \mathbb{R}$  konstant ist. In diesem Fall gilt

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot \alpha.$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $e_1$  und  $u$ .

3-4 Sei  $c : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene Frenetkurve mit positiver Krümmung. Zeigen Sie, dass dann für jeden Einheitsvektor  $u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\int_0^a \langle e_1(t), u \rangle dt = 0$$

und zeigen Sie:

- Die sphärische Kurve  $e_1 : [0, a] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist genau dann in der Halbkugel  $H(u) = \{v \in S^2; \langle u, v \rangle = 0\}$  enthalten, wenn die Kurve  $c$  in einer Ebene enthalten ist mit Normalenvektor  $u$ .
- Eine Böschungslinie ist nur dann geschlossen, wenn sie eben ist.

---

<sup>1</sup>[www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html](http://www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html)