Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Ein Verfahren für die beschränkte lineare Ausgleichsrechnung.

Aufgabenstellung

Gegeben sei das beschränkte lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 = \min \quad \text{s. t.} \quad Cx = d$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ sowie $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ und $d \in \mathbb{R}^p$. Außerdem gelte

$$\operatorname{rang} C = p, \quad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} = n.$$

Zur Bestimmung der (eindeutigen) Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ kann man folgendermaßen vorgehen. Eine QR-Zerlegung von C^T liefert wegen $\operatorname{rang} C = p$ eine Faktorisierung

$$C\hat{Q} = [\, L \quad 0\,]$$

mit orthogonaler Matrix $\hat{Q}$ und nichtsingulärer unterer Dreiecksmatrix L. Damit transformiert sich $Cx = d$ auf

$$Cx = C\hat{Q}\hat{Q}^T x = [\, L \quad 0\,] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = d$$

und die Nebenbedingung besitzt die Lösungsmenge

$$\left\{ x = \hat{Q} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; u = L^{-1} d \right\}.$$

Transformiert man die Zielfunktion entsprechend, so ergibt sich

$$\|Ax - b\|_2 = \|A\hat{Q}\hat{Q}^T x - b\|_2 = \left\| [\, E \quad F\,] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - b \right\|_2.$$

Dabei besitzt F wegen

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} C\hat{Q} \\ A\hat{Q} \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} L & 0 \\ E & F \end{bmatrix}$$

nach Voraussetzung vollen Spaltenrang. Eine QR-Zerlegung von F liefert deshalb eine Faktorisierung

$$QF = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit orthogonaler Matrix Q und nichtsingulärer oberer Dreiecksmatrix R. Damit gilt in der Lösungsmenge der Nebenbedingung

$$\|Ax - b\|_2 = \|Eu + Fv - b\|_2 = \|QFv - Q(b - Eu)\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} v - \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \right\|_2,$$

wobei

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = Q(b - EL^{-1}d).$$

Daraus ergibt sich $v = R^{-1}r$ und die Lösung x ist gegeben durch

$$x = \hat{Q} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \hat{Q} \begin{bmatrix} L^{-1}d \\ R^{-1}r \end{bmatrix}.$$

Man implementiere dieses Verfahren und teste es an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$