Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Ergänzung zur Vorlesung

Verallgemeinerte Inverse

Satz 1.22

Mit den Bezeichnungen von Lemma 1.21 gilt

im Fall $z \neq 0$, $t \neq 0$

$$(A + uv^H)^+ = A^+ - A^+uz^+ - (t^+)^H v^H A^+ + d(t^+)^H z^+, \tag{1.39a}$$

im Fall $z = 0$, $t \neq 0$, $d = 0$

$$(A + uv^H)^+ = A^+ - (A^+u)(A^+u)^+ A^+ - (t^+)^H v^H A^+, \tag{1.39b}$$

im Fall $z = 0$, $d \neq 0$

$$(A + uv^H)^+ = A^+ + (d^H)^{-1} t\,(A^+u)^H A^+ - d^H \sigma^{-1} p\, q^H, \tag{1.39c}$$

wobei $p = A^+u + (d^H)^{-1}\|A^+u\|_2^2\, t$, $q^H = v^H A^+ + (d^H)^{-1}\|t\|_2^2\,(A^+u)^H A^+$ und $\sigma = \|A^+u\|_2^2\,\|t\|_2^2 + |d|^2$,

im Fall $z = 0$, $t = 0$, $d = 0$

$$\begin{aligned}(A + uv^H)^+ = A^+ &- (A^+u)(A^+u)^+ A^+ - A^+(v^H A^+)^+(v^H A^+) + \\ &+ (A^+u)^+ A^+ (v^H A^+)^+ (A^+u)(v^H A^+).\end{aligned} \tag{1.39d}$$

Beweis:

Sei X die rechte Seite von (1.39a). Dann gilt

$$\begin{aligned}(A + uv^H)X &\overset{(1.37b)}{=} AA^+ - \underbrace{AA^+u}_{=u-z} z^+ + uv^H A^+ - uv^H A^+ uz^+ - \\ &\qquad - u\underbrace{v^H (t^+)^H}_{=1} v^H A^+ + du\underbrace{v^H(t^+)^H}_{=1} z^+ = \\ &\overset{(1.37c,d)}{=} AA^+ - uz^+ + zz^+ + uv^H A^+ - uv^H A^+ uz^+ - \\ &\qquad - uv^H A^+ + uz^+ + u\underbrace{v^H A^+ u}_{=d-1} z^+ = \\ &= AA^+ + zz^+ \text{ hermitesch}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}X(A + uv^H) &\overset{(1.37a)}{=} A^+A - (t^+)^H \underbrace{v^H A^+ A}_{=v^H - t^H} + A^+uv^H - A^+u\underbrace{z^+u}_{=1} v^H - \\ &\qquad - (t^+)^H v^H A^+ uv^H + d(t^+)^H \underbrace{z^+u}_{=1} v^H = \\ &\overset{(1.37c,d)}{=} A^+A - (t^+)^H v^H + (t^+)^H t^H + A^+uv^H - A^+uv^H - \\ &\qquad - (t^+)^H v^H A^+ uv^H + (t^+)^H v^H + (t^+)^H \underbrace{v^H A^+ u}_{=d-1} v^H = \\ &= A^+A + (t^+)^H t^H \text{ hermitesch.}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(A+uv^H)X(A+uv^H) = (A+uv^H)(A^+A+(t^+)^H t^H) =$$

$$\overset{(1.37b)}{=} A + u\,\underbrace{v^H A^+ A}_{=v^H - t^H} + u\,\underbrace{v^H (t^+)^H}_{=1}\, t^H =$$

$$\overset{(1.37c,d)}{=} A + uv^H - ut^H + ut^H = A + uv^H$$

und

$$X(A+uv^H)X = X(AA^+ + zz^+) =$$

$$\overset{(1.37a)}{=} A^+ - (t^+)^H v^H A^+ - A^+ uz + d(t^+)^H z^+ = X.$$

Sei X die rechte Seite von (1.39b). Dann gilt

$$(A+uv^H)X \overset{(1.37b)}{=} AA^+ - \underbrace{A(A^+u)}_{=u-z}(A^+u)^+A^+ + uv^H A^+ -$$

$$- u\,\underbrace{v^H(A^+u)}_{=-1}(A^+u)^+A^+ - u\,\underbrace{v^H(t^+)^H}_{=1}\,v^H A^+ =$$

$$\overset{(1.37c,d)}{=} AA^+ - u(A^+u)^+A^+ + uv^H A^+ + u(A^+u)^+A^+ - uv^H A^+ =$$

$$= AA^+ \text{ hermitesch}$$

und

$$X(A+uv^H) = A^+A - (A^+u)(A^+u)^+A^+A - (t^+)^H\,\underbrace{v^H A^+ A}_{=v^H - t^H} +$$

$$+ A^+uv^H - (A^+u)(A^+u)^+A^+uv^H - (t^+)^H\,\underbrace{v^H A^+ u}_{=-1}\,v^H =$$

$$\overset{(1.37c,d)}{=} A^+A - (A^+A(A^+u)(A^+u)^+)^H - (t^+)^H v^H + (t^+)^H t^H +$$

$$+ A^+uv^H - A^+uv^H + (t^+)^H v^H =$$

$$= A^+A - (A^+u)(A^+u)^+ + (t^+)^H t^H \text{ hermitesch.}$$

Daraus folgt

$$(A+uv^H)X(A+uv^H) = AA^+(A+uv^H) =$$

$$\overset{(1.37c,d)}{=} A + \underbrace{AA^+u}_{=u}\,v^H = A + uv^H$$

und

$$X(A+uv^H)X = XAA^+ = X.$$

Sei X die rechte Seite von (1.39c). Für $u = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $u \neq 0$. Zunächst gilt wegen $z = 0$, $d \neq 0$ nach (1.38)

$$\operatorname{rang}(A+uv^H) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} A & 0 \\ t^H & -d \end{bmatrix} - 1 = \operatorname{rang} A\,.$$

Außerdem ist $u \in \operatorname{bild} A$ wegen $z = 0$. Zusammen ergibt das $\operatorname{bild}(A+uv^H) = \operatorname{bild} A$ und somit

$$(A+uv^H)(A+uv^H)^+ = AA^+,$$

da es nur einen orthogonalen Projektor auf bild A gibt. Wegen $q^H AA^+ = q^H$ folgt dann

$$X(A + uv^H)(A + uv^H)^+ = XAA^+ = X$$

und die erste Voraussetzung von Lemma 1.20 ist erfüllt. Um auch die zweite Voraussetzung nachzuweisen, betrachten wir die hermitesche Matrix

$$S = A^+A - (A^+u)(A^+u)^+ + pp^+.$$

Wegen $A^+Ap = A^+u$ und

$$\begin{aligned}(A^+u)(A^+u)^+p &= [p^H(A^+u)(A^+u)^+]^H = \\ &= [u^H(A^+)^H(A^+u)(A^+u)^+]^H = \\ &= (A^+u)(A^+u)^+(A^+u) = A^+u\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}S^2 = A^+A &- (A^+u)(A^+u)^+A^+A + pp^+A^+A - \\ &- A^+A(A^+u)(A^+u)^+ + (A^+u)(A^+u)^+ - pp^+(A^+u)(A^+u)^+ + \\ &+ A^+A\,pp^+ - (A^+u)(A^+u)^+pp^+ + pp^+ = \\ = S &+ F + F^H,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}F &= A^+A\,pp^+ - (A^+u)(A^+u)^+pp^+ = \\ &= A^+A\,pp^+ - [(p^+)^Hp^H(A^+u)(A^+u)^+]^H = \\ &= A^+up^+ - [(p^+)^H(A^+u)^H(A^+u)(A^+u)^+]^H = \\ &= A^+up^+ - A^+up^+ = 0\,,\end{aligned}$$

d. h. S ist idempotent. Also gilt nach Lemma 1.19

$$\begin{aligned}\operatorname{rang} S = \operatorname{spur} S &= \operatorname{spur}(A^+A) - \operatorname{spur}((A^+u)(A^+u)^+) + \operatorname{spur}(pp^+) = \\ &= \operatorname{rang}(A^+A) - \operatorname{rang}((A^+u)(A^+u)^+) + \operatorname{rang}(pp^+).\end{aligned}$$

Wegen

$$p = 0 \;\Rightarrow\; Ap = AA^+Au = 0 \overset{z = 0}{\Rightarrow} u = 0 \;\Rightarrow\; A^+u = 0 \;\Rightarrow\; p = 0$$

folgt aus $u \neq 0$ sofort $p \neq 0$ und $A^+u \neq 0$, d. h.

$$\operatorname{rang}((A^+u)(A^+u)^+) = \operatorname{rang}(pp^+) = 1$$

bzw.

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang}(A^+A) = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A + uv^H).$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
(A+uv^H)S = A - \underbrace{A(A^+u)}_{=u}(A^+u)^+ + \underbrace{Ap}_{=u}\, p^+ + \\
+ u\underbrace{v^H A^+ A}_{=v^H - t^H} - u\underbrace{v^H(A^+u)}_{=d-1}(A^+u)^+ + uv^H pp^+ = \\
= A - u(A^+u)^+ + up^+ + uv^H - ut^H - \\
- du(A^+u)^+ + u(A^+u)^+ + \\
+ u\underbrace{v^H A^+ u}_{=d-1} + u(d^H)^{-1}\underbrace{\|A^+u\|_2^2\, \overbrace{\|t\|_2^2}^{=v^H t}}_{=\sigma-|d|^2} p^+ = \\
= A + uv^H + up^+ - ut^H - du(A^+u)^+ + \\
+ dup^+ - up^+ + u(d^H)^{-1}\sigma p^+ - dup^+ = \\
= A + uv^H - u(t^H + d(A^+u)^+ - (d^H)^{-1}\sigma p^+) = \\
= A + uv^H,
\end{aligned}
$$

letzteres wegen

$$p^H p = \|A^+u\|_2^2 + |d|^{-2}\|A^+u\|_2^4\,\|t\|_2^2 = \|A^+u\|_2^2\,|d|^{-2}\sigma \neq 0$$

und

$$
\begin{aligned}
(d^H)^{-1}\sigma p^+ &= (d^H)^{-1}\sigma\,(p^H p)^{-1} p^H = \\
&= (d^H)^{-1}|d|^2\|A^+u\|_2^{-2}(A^+u + (d^H)^{-1}\|A^+u\|_2^2\, t)^H = \\
&= t^H + d\,(A^+u)^+.
\end{aligned}
$$

Da S ein orthogonaler Projektor ist, bedeutet die obige Beziehung wegen der Gleichheit der Ränge, daß

$$\operatorname{cokern}(A+uv^H) = \operatorname{bild} S$$

bzw.

$$(A+uv^H)^+(A+uv^H) = S\,.$$

Für die zweite Voraussetzung von Lemma 1.20 bleibt also $X(A+uv^H) = S$ zu zeigen. Mit

$$
\begin{aligned}
q^H u &= v^H A^+ u + (d^H)^{-1}\,\|t\|_2^2\,\|A^+u\|_2^2 = \\
&= d - 1 + (d^H)^{-1}(\sigma - d^H d) = (d^H)^{-1}\sigma - 1
\end{aligned}
$$

erhält man

$$\begin{aligned}
X(A+uv^H) &= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H A^+A - d^H\sigma^{-1}pq^HA + \\
&\qquad + A^+uv^H + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H A^+uv^H - d^H\sigma^{-1}pq^Huv^H = \\
&= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H - d^H\sigma^{-1}pq^HA + \\
&\qquad + pv^H - pv^H + d^H\sigma^{-1}pv^H = \\
&= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H - d^H\sigma^{-1}p\,(q^HA - v^H) = \\
&= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H - \\
&\qquad - d^H\sigma^{-1}p\,(-t^H + (d^H)^{-1}\|t\|_2^2\,(A^+u)^HA^+A) = \\
&= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H - \\
&\qquad - d^H\sigma^{-1}p\,(d\,\|A^+u\|_2^{-2}(A^+u)^H - d\,\|A^+u\|_2^{-2}p^H + \\
&\qquad\qquad\qquad + (d^H)^{-1}\|t\|_2^2\,(A^+u)^H) = \\
&= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H - \\
&\qquad - d^H\sigma^{-1}p\,(d\,(A^+u)^+ - d\,(d^Hd)^{-1}\sigma\,(p^Hp)^{-1}p^H + \\
&\qquad\qquad\qquad + (d^H)^{-1}\|t\|_2^2\,\|A^+u\|_2^2\,(A^+u)^+) = \\
&= A^+A + (d^H)^{-1}t\,(A^+u)^H + pp^+ - \\
&\qquad - \sigma^{-1}p\,(d^Hd + \|t\|_2^2\,\|A^+u\|_2^2)\,(A^+u)^+ = \\
&= A^+A + (p - A^+u)\,\|A^+u\|_2^{-2}\,(A^+u)^H + pp^+ - p(A^+u)^+ = \\
&= A^+A - (A^+u)(A^+u)^+ + pp^+ = S\,.
\end{aligned}$$

Sei X die rechte Seite von (1.39d). Wegen

$$d = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad v^HA^+u = -1$$

verschwinden weder u noch v. Mit $z = 0$ und $t = 0$ verschwinden dann auch weder A^+u noch v^HA^+. Die Matrix $A^+A - (A^+u)(A^+u)^+$ ist ein orthogonaler Projektor, für den nach Lemma 1.19 gilt

$$\operatorname{rang}(A^+A - (A^+u)(A^+u)^+) \overset{(1.35d)}{=} \operatorname{rang} A - 1 \overset{(1.38)}{=} \operatorname{rang}(A + uv^H).$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&(A+uv^H)(A^+A - (A^+u)(A^+u)^+) = \\
&\qquad = A - \underbrace{A(A^+u)}_{=u}(A^+u)^+ + u\,\underbrace{v^HA^+A}_{=v^H} - u\,\underbrace{v^H(A^+u)}_{=-1}(A^+u)^+ = \\
&\qquad = A - u(A^+u)^+ + uv^H + u(A^+u)^+ = A + uv^H
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
(A+uv^H)^+(A+uv^H) &= A^+A - (A^+u)(A^+u)^+, \\
(A+uv^H)(A+uv^H)^+ &= AA^+ - (v^HA^+)^+(v^HA^+),
\end{aligned}$$

letzteres aus Symmetriegründen. Mit $XAA^+ = X$ sowie

$$\begin{aligned}
X(A+uv^H)(A+uv^H)^+ &= X(AA^+ - (v^HA^+)^+(v^HA^+) = \\
&= X - A^+(v^HA^+)^+(v^HA^+) + (A^+u)(A^+u)^+A^+(v^HA^+)^+(v^HA^+) + \\
&\qquad + A^+(v^HA^+)^+(v^HA^+) - (A^+u)^+A^+(v^HA^+)^+(A^+u)(v^HA^+) = X
\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
X(A+uv^H) = {} & A^+A - (A^+u)(A^+u)^+A^+A - A^+(v^HA^+)^+v^H + \\
& + (A^+u)^+A^+(v^HA^+)^+(A^+u)v^H + A^+uv^H - \\
& - (A^+u)(A^+u)^+A^+uv^H - A^+(v^HA^+)^+(v^HA^+)uv^H + \\
& + (A^+u)^+A^+(v^HA^+)^+(A^+u)(v^HA^+)uv^H = \\
= {} & A^+A - (A^+u)(A^+u)^+ = (A+uv^H)^+(A+uv^H)
\end{aligned}
$$

folgt die Behauptung nach Lemma 1.20.

□