Klausur Funktionentheorie

5 Aufgaben

Start 9:15, Abgabe bis 11:15

Aufgabe 1)

a) Finden Sie eine konforme Abbildung f des offenen Viertelkreises

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ und } |z| < 1\}$$

auf die offene Einheitskreisscheibe D.

b) Finden Sie eine konforme Abbildung g von

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \in (-\pi, 0)\}$$

auf D.

c) Sei h die konforme Abbildung eines unbeschränkten Gebietes U auf den Einheitskreis D. Bestimmen Sie $\inf\{|h'(z)| : z \in U\}$. Wird dieses Infinimum auch angenommen, das heißt, existiert das Minimum?

(15 Punkte)

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = 1/(z^2 - 6z + 5)$ um den Punkt 3 sowie deren Konvergenzradius.

b) Finden Sie nun die Laurentreihenentwicklung dieser Funktion f auf den Annuli $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 5\}$ sowie $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2021 < |z - 1|\}$, das heißt für A_2 ist der Entwicklungspunkt 1 zu nutzen.

(15 Punkte)

Aufgabe 3) Wir betrachten die auf $\mathbb{C}$ meromorphe (Beweis nicht erforderlich) Funktion

$$\frac{\cos(z) - 1}{z^4 + 5z^3 - e^z}.$$

Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Polstellen, gerechnet mit ihrer (positiven!) Ordnung, dieser Funktion in der offenen Einheitskreisscheibe D, das heißt die Summe der Ordnungen aller Polstellen in D. *[Hinweis: Nachdenken ist oft besser als einen fertigen Satz zu nutzen.]*

(8 Punkte)

Aufgabe 4)

a) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 - x^{2021}} dx.$$

(4 Punkte)

b) Sei γ ein beliebiger Integrationsweg in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, der von $-i$ nach i führt. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(\sin(\pi z))^2} \, dz$$

unabhängig von γ ist. *[Hinweis: Was gilt in der Null für die Laurent-Entwicklung gerader Funktionen mit einem Pol dort? Eine Lösung, die diesen Umstand nutzt, gilt nur als vollständig, wenn er bewiesen wird.]*

(7 Punkte)

Aufgabe 5) Lokalisieren und klassifizieren Sie alle Singularitäten der folgenden Funktionsdefinitionen

$$f(z) = \frac{z^2 + 42z - 43}{z^3 - 4z^2 + 3}, g(z) = \cos(-1/z^2), h(z) = \frac{e^z - 1}{\sin(z)}.$$

(12 Punkte)

ENDE DER KLAUSUR