Einführung in die algebraische K-Theorie

Vorlesung im Sommersemester 2013

Di 11-13 Uhr Hs 15
Fr 13-15 Uhr SG 1-10

Bezeichnungen

$B_n(X, A)$	abelsche Gruppe der n-Ränder des topologischen Raums X mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A, vgl. 1.1.1
$C_n(X)$	abelsche Gruppe der n-Ketten des topologischen Raums X, vgl. 1.1.1
$C_n(X, A)$	abelsche Gruppe der n-Ketten des topologischen Raums X mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A, vgl. 1.1.1
$C_*(G, A)$	Standardkomplex der Gruppe G mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A, vgl. 2.1.3.1
D(A)	die Untergruppe der entarteten Simplexe der simplizialen abelschen Gruppe A, vgl. 2.1.2.3.
∂	Randoperator auf den Ketten eines topologischen Raums, vgl. 1.1.1.
Δ	Kategorie der Mengen [n] mit n = 1,2,3,... und schwach monoton steigenden Abbildungen, vgl. 1.4.7 und 1.4.8.
Δ_f	Seitenabbildung zur monoton steigenden Abbildung f:[m] → [n], vgl. 1.4.11.
$\partial\Delta[n] = \dot{\Delta}[n]$	die simpliziale Menge, die den Rand des n-dimensionalen Standard-Simplex beschreibt, siehe Anhang 'Simpliziale Mengen/Beispiele'
Δ_n	n-dimensionales Standard-Simplex, vgl. 1.1.1
$H_n(G, A)$	n-te Homologie der Gruppe G mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A, vgl. 2.1.3.1.
$H_n(X, A)$	n-te singulare Homologie des topologischen Raums X mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A, vgl. 1.1.
$H_n(X,Y, A)$	n-te singulare Homologie des topologischen Raums X relativ zum Unterraum Y mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A, vgl. 1.1.1
I	Einheitsintervall [0,1] der reellen Geraden, vgl. 1.1.1.
i\I	Teilkategorie der Kategorie I der Objekte unterhalb von i, vgl. 2.1.4.7.
i\f	Kategorie der f-Objekte unterhalb von i (mit einem Funktor f:C⟶D und einem Objekt i ∈ |D|), vgl. 2.1.5.1.
I/i	Teilkategorie der Kategorie I der Objekte oberhalb von i, vgl. 2.1.4.8.
f/i	Kategorie der f-Objekte oberhalb von i (mit einem Funktor f:C⟶D und einem Objekt i ∈ |D|), vgl. 2.1.5.2.
K(X)	Grothendieck-K-Gruppe des topologischen Raums X, vgl. 1.3.2.

$K_i\mathbf{M}$	die i-te K-Gruppe der exakten Kategorie **M**, vgl. 2.2.4.
Ord	:= Δ, Kategorie der geordneten endlichen Mengen [n] = {0,...,n} und schwach monoton steigenden Abbildungen, vgl. 2.1.5.8.
P(A)	die Kategorie der projektiven endlich erzeugte Moduln über dem Ring A, vgl. 2.2.6
Q(**M**)	die Subquotienten-Kategorie der exakten Kategorie M, vgl. 2.2.2.1.
$\pi_1(X, x)$	fundamentale Gruppe des topologischen Raums X im Punkt x, vgl. 1.2.1
$\pi_n(X, x)$	n-te Homotopie des topologischen Raums X im Punkt x, vgl. 1.2.3.
$\pi_n(X, A, x)$	n-te (relative) Homotopie des topologischen Raums X bezüglich des Unterraums A im Punkt x, vgl. 1.2.4.
S	der Funktor Top $\longrightarrow$ (Simpliziale Mengen), welcher jedem topologischen Raum Y die simpliziale Menge aller singulären Simplexe von Y zuordnet, vgl. 2.1.5.8.
S^1	Einheitssphäre der Dimension 1, vgl. 1.2.2.
S^n	Einheitssphäre der Dimension n oder auch n-Sphäre, vgl. 1.2.3.
tot(K)	der einfache Komplex zum Doppelkomplex K, vgl. 'Die beiden Spektralsequenzen zu einem Doppelkomplex'.
$u_{f,X} = u_f$	universelle Familie des darstellbaren Funktors f mit dem darstellenden Objekt X, siehe Anhang 'Darstellbare Funktoren'.
X_n	Menge der n-Simplexe der simplizialen Menge X, vgl. 1.4.9.
$Z_n(X, A)$	abelsche Gruppe der n-Zyklen des topologischen Raums X mit Koeffizienten in der abeslchen Gruppe A, vgl. 1.1.1
$i_!$	der injektive Morphismen der Subquotienten-Kategorie zur Inflation i einer exakten Kategorie, vgl. 2.2.4.
$j^!$	der surjektive Morphismus der Subquotienten-Kategorie zur Deflation j einer exakten Kategorie, vgl. 2.2.4.
[n]	die Menge {0,1,...,n} der ersten n natürlichen Zahlen einschließlich der Null, vgl. 1.4.8.
|K|	geometrische Realisierung des Simplizialkomplexes K, vgl. 1.4.4.

1. Motivation

Die algebraische K-Theorie hat ihren Ursprung in der algebraischen Topologie und versucht die sogenannte topologische K-Theorie von Grothendieck zu verallgemeinern.

Tatsächlich gibt es eine ganze Reihe von Verallgemeinerungsversuchen, von denen die wichtigsten die

K-Theorie von Milnor und die
K-Theorie von Quillen

sind.

Die K-Theorie von Milnor ist eine frühe Variante der K-Theorie, welche die Konstruktionen der topologischen K-Theorie von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Körpererweiterungen zu übertragen versucht. Die Definition der K-Gruppen hat einen expliziten, rezeptartigen, technischen Charakter.

Die K-Theorie von Quillen ist eine der späten K-Theorie-Konstruktionen. Alle späteren Konstruktionen in diesem Kontext scheinen nur leichte Varianten der Konstruktion von Quillen zu sein. Die Konstruktion ist von hochgradig theoretischer Natur: nur in ganz einfachen Fällen lassen sich die Quillen-K-Gruppen berechnen.

Die Konstruktion der K-Gruppe von Quillen läßt sich für jede (additive) Kategorie durchführen, so daß man im Prinzip für jede mathematische Disziplin K-Gruppen definieren lassen. Insbesondere sind die Quillen-K-Gruppen immer dann definiert, wenn es die Milnor-K-Gruppen sind.

Die Frage nach der Beziehung zwichen den Quillen-K-Gruppen und den Milnor-K-Gruppen ist Gegenstand einer der tiefliegensten Vermutungen der Gegenwart, der Bloch-Kato-Vermutung. Vereinfachend könnte man sagen, nach der Bloch-Kato-Vermutung ist die Milnor-K-Theorie ein Rezept für die Berechnung der Quillen-K-Gruppen im Fall von Körpern.

Der Beweis eines Spezialfalls der Bloch-Kato-Vermutung (die sogenannte Milnor-Vermutung) hat weitreichende algebraische Konzequenzen, insbesondere in der Zahlentheorie, und gestattet zum Beispiel die Klassifikation der Divisionsalgebren über einem gegebenen Körper.

Voevodsky hat einen Beweis der Bloch-Kato-Vermutung angekündigt. Details sind jedoch noch nicht bekannt.

Dies ist eine Übersichtsvorlesung. Ziel ist die Beschreibung der Arbeit

Quillen, D.: Higher algebraic K-theorie, Lecture Notes in Math. 341 (1973), 77-139.

Die Betonung der Vorlesung soll auf der Erklärung der Konstruktionen und weniger auf den Details von Beweisen liegen.

Wir beginnen mit der Beschreibung des Zusammenhangs der K-Theorie mit anderen Konstruktionen der algebraischen Topologie.

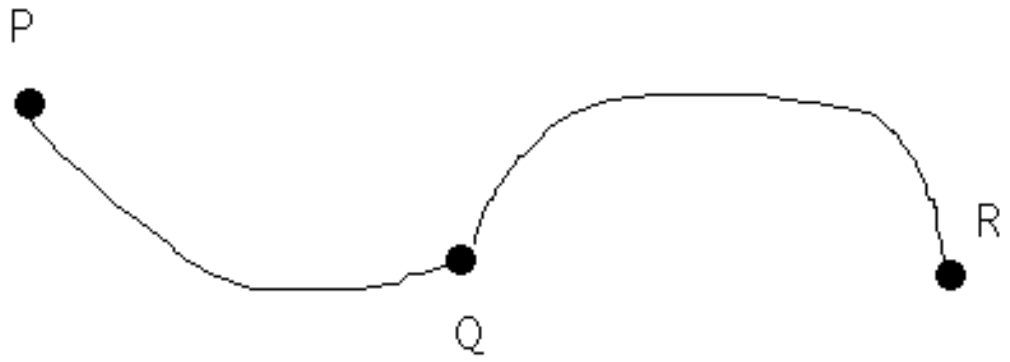
1.1. Homologie

1.1.1 Kurven, Ketten, Ränder, Zyklen, Homologie-Gruppen

Sei X ein topologischer Raum. Eine Kurve von X ist eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon I := [0, 1] \longrightarrow X.$$

Man nennt dann $P := \gamma(0)$ Anfang und $Q := \gamma(1)$ Ende der Kurve und sagt, γ sei eine Kurve von P nach Q.



Zur Durchführung algebraischer Konstruktionen ist es sinnvoll die Addition von Kurven zu definieren. Unter der Summe einer Kurve von P nach Q und einer Kurve von Q nach R stellt man sich dabei eine Kurve von P anch R vor.

Wir setzen deshalb

$C_1(X)$:= freie abelsche Gruppe, die von den Kurven von X erzeugt wird.

Analog sei

$C_0(X)$:= freie abelsche Gruppe die von den Punkten von X erzeugt wird

und

$C_n(X)$:= freie abelsche Gruppe die von den stetigen Abbildungen $\Delta_n \longrightarrow X$ erzeugt wird

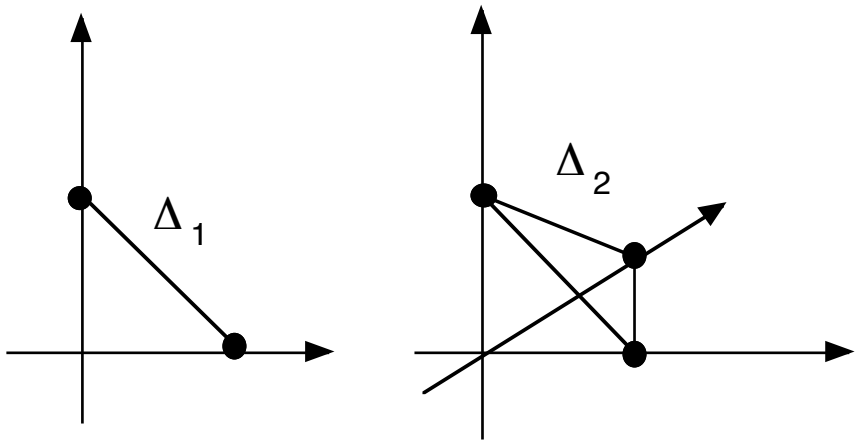
Dabei bezeichne Δ_n das Standard-Simplex der Dimension n,

$$\Delta_n := \{x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + ... + x_n = 1,\ 0 \leq x_i \text{ für jedes } i\}$$

Die Elemente von $C_n(X)$ heißen n-Ketten oder auch n-dimensionale Ketten X. Mit anderen Worten, n-Ketten sind endliche Linearkombinationen von stetigen Abbildungen $\Delta_n \longrightarrow X$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Nimmt man stattdessen Linearkombinantionen mit Koeffizienten aus einer abelschen Gruppe, so erhältt die abelsche Gruppe

$$C_n(X, A)$$

der n-Ketten mit Koeffizienten in A.



Jeder Kurve kann man so die Differenz aus Anfang und Ende zuordenen,

$$\partial(\gamma) = P - Q.$$

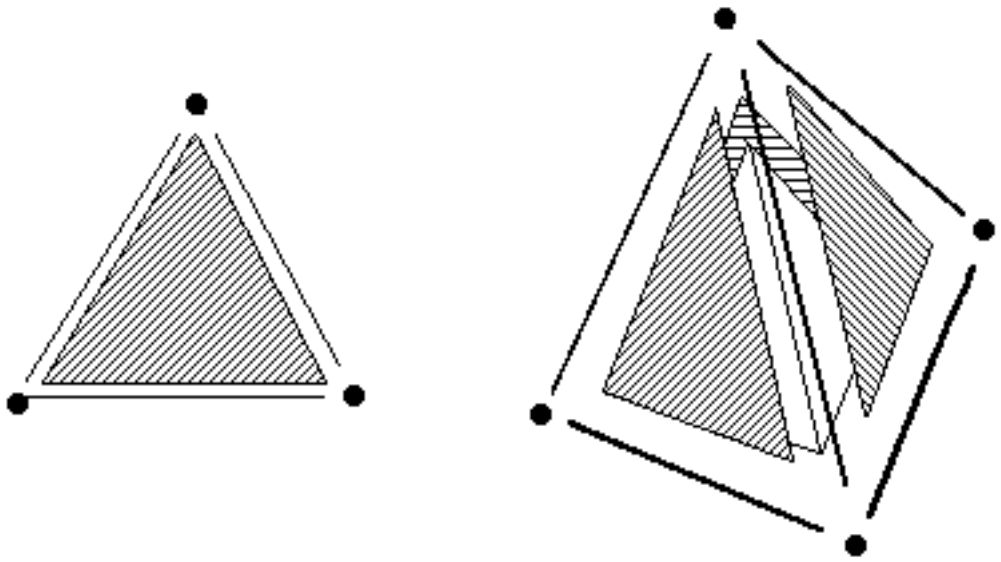
Durch lineare Fortsetzung erhält man so eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\partial\colon C_1(X) \longrightarrow C_0(X)$$

Allgemeiner erhält man für jedes n eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\partial\colon C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X),$$

welche jede Kette auf deren Rand abbildet.



Verwendet man anstelle von ganzzahligen Linearkombinationen solche mit Koeffizienten aus einer abelschen Gruppe A, so erhält man Gruppen-Homomorphismen

$$\partial\colon C_n(X,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,A),$$

welche auch Rand-Operatoren heißen. Ist A ein Ring, so sind diese sogar A-linear. Die Ketten im Kern dieses Operators, d.h. die Ketten ohne Rand, heißen auch n-Zyklen und werden mit

$$Z_n(X, A) := \mathrm{Ker}(\partial\colon C_n(X,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,A))$$

bezeichnet. Die n-Ketten, welche Ränder sind, bilden ebenfalls eine Untergruppe von $C_n(X,A)$, welche mit

$$B_n(X, A) := \mathrm{Im}(\partial: C_{n+1}(X,A) \longrightarrow C_n(X,A))$$

bezeichnet wird.
Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß jeder Rand ein Zyklus ist, d.h.die Ränder bilden eine Untergruppe der Gruppe der Zyklen,

$$B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A).$$

Die Ketten von X bilden also zusammen mit den Randoperatoren einen Komplex

$$(C(X,A), \partial): \ldots \xrightarrow{\partial} C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} C_n(X,A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X,A) \xrightarrow{\partial} \ldots,$$

den Komplex der singulären Ketten des topologischen Raums X.

Die Faktorgruppe

$$H_n(X, A) := H_n(X, A)/B_n(X, A) := H_n(C(X,A))$$

heißt n-te singuläre Homologie von X mit Koeffizienten aus A.

Ist $Y \subseteq X$ ein Unterraum des topologischen Raums X, so ist jede Kette von Y auch eine Kette von X, der Komplex der singulären Ketten von Y ist deshalb ein Teilkomplex des Komplexes der singulären Ketten von X,

$$C(Y, A) \subseteq C(X, A).$$

Der zugehörige Fakgtorkomplex wird mit

$$C(X, Y, A) := C(X, A)/C(Y, A)$$

Er besteht aus Ketten von X, wobei man zwei solche Ketten, die sich um eine Kette von Y unterscheiden, als gleich ansieht. Die Homologie dieses Komplexes,

$$H_n(X, Y, A) := H_n(C(X, Y, A))$$

heißt auch n-te relative singuläre Homologie von X bezüglich Y mit Koeffizienten aus A.

1.1.2 Literatur

Die Eigenschaften der singulären Homologie-Gruppen wird in den Lehrbüchern der algebraischen Topologie beschrieben, wie zum Beispiel in

Spanier, E.H.: Algebraic topology, Mc-Graw-Hill, New York 1966
Dold, A.: Lectures on algebraic topology, Springer, Heidelberg 1972
Switzer, R.M.: Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, New York 1975

siehe auch das Vorlesungsmanuskript Herzog, Algebraische Topologie.

Herzog, B.:Algebraische Topologie,
www.mathematik.uni-leipzig.de/ ~herzog/Manuskripte/Manuskripte.html

1.1.3 Eigenschaften

Einige der wichtigsten Eigenschaften sind die folgenden:

1) $H_n(X, A)$ hängt funktoriell von X und A ab.
2) $H_n(X, Y, A)$ hängt funktoriell von (X, Y) und A ab.
3) Homotope[1] (stetige) Abbildungen topologischer Räume induzieren dieselben Abbildungen auf den Homologie-Gruppen. Insbesondere sind die höheren Homologie-Gruppen ($n > 0$) kontrahierbarer Räume[2] trivial.

---

[1] d.h. solche Abbildungen, die sich stetig ineinander überführen lassen. Zwei stetige Abbildungen

4) Für jeden topologischen Raum X und jeden Unterraum Y hat man eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H_n(Y, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X,Y, A) \longrightarrow H_{n-1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

5) Allgemeiner hat man für jeden topologischen Raum X und Unterräume

$$X \supseteq Y \supseteq Z$$

eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H_n(Y,Z, A) \longrightarrow H_n(X,Z, A) \longrightarrow H_n(X,Y, A) \longrightarrow H_{n-1}(Y,Z, A) \longrightarrow \ldots$$

6) $H_n(X, A) = 0$ für Mannigfaltigkeiten, Simplizialkomplexe und Zellkomplexe X einer Dimension $< n$.

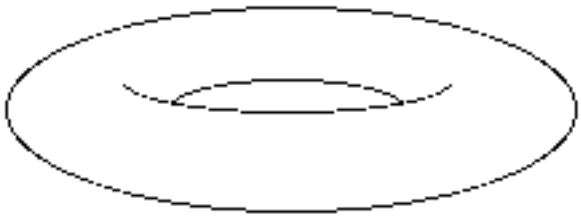
1.1.4 Anwendungen

Einige wichtige Sätze der Theorie der Homologie-Gruppen sind die folgenden:

1) Brauerscher Fixpunkt-Satz. Jede stetige Abbildung der kompakten Vollkugel in sich besitzt einen Fixpunkt.
2) Fundamentalsatz der Algebra. Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine komplexe Nullstelle.
3) Satz vom Igel. Jedes stetige Vektorfeld auf der Kugeloberfläche besitzt eine Nullstelle.
4) Klassifikation der kompakten Riemannschen Fläche. Jede kompakte Riemannsche Fläche entsteht aus der Kugel-Oberfläche, indem man in die Kugel endlich viele Löcher bohrt. Die Anzahl der Löcher heißt Geschlecht der Riemannschen Fläche X und ist gleich

$$g(X) := \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} H_1(X, \mathbb{R})$$

Beispiel.
Ist X ein Torus,



Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} H_1(X, \mathbb{R}) = 2.$$

---

f, g: $X \longrightarrow X'$
von topologischen Räumen heißen homotop, wenn es eine Homotopie

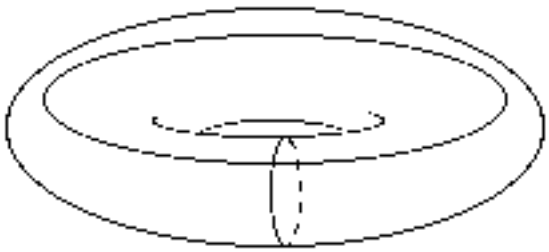
$$H_t: X \longrightarrow Y, \ 0 \le t \le 1,$$

gibt, d.h. eine stetige Abbildung $X \times I \longrightarrow Y$, $(x, t) \mapsto H_t(x)$, mit

$$H_0 = f \text{ und } H_1 = g.$$

[2] Ein topologischer Raum heißt kontrahierbar, wenn die identische Abbildung homotop ist zu einer konstanten Abbildung.

Als Erzeuger des zwei-dimensionalen Vektorraums $H_1(X, \mathbb{R})$ kann man die Restklassen der beiden geschlossenen Kurven verwenden, die untenstehend skitziert sind.



1.2 Homotopie

1.2.1 Die fundamentale Gruppe

Die oben definierte erzwungene Art der Addition von Kurven, indem man die Kurven als Elemente der von ihnen erzeugten abelschen Gruppe aufffaßt, ist etwas fragwürdig. Es liegt die Frage nahe, ob man diese Addition nicht in einer etwas natürlicheren Art definieren kann, zum Beispiel, indem man die Addition als hintereinander Ausführen von Wegen einführt. Die Zusammensetzung der Wege

$$\gamma: I \longrightarrow X \text{ und } \delta: I \longrightarrow X \text{ mit } \gamma(1) = \delta(0)^3,$$

könnte der Weg $\gamma \bullet \delta$ von $\gamma(0)$ nach $\delta(1)$ sein mit

$$(\gamma \bullet \delta)(\tau) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Die beiden Wege werden nacheinander durchlaufen und liefern eine Weg, der im Anfang des ersten beginnt und am Ende des zweiten endet.

Fixiert man einen Punkt x und betrachtet nur die Wege von x nach x, so kann man je zwei solche Wege zusammensetzen. Die Menge dieser Wege ist jedoch keine Gruppe. Sie wird jedoch zur Gruppe, wenn man homotope Wege identifiziert.

Zwei Wege

$$\gamma: I \longrightarrow X \text{ und } \delta: I \longrightarrow X$$

von x nach x heißen homotop, wenn man sie stetig ineinander überführen kann, d.h. es gibt eine Homotopie H_t von γ nach δ, d.h. eine Familie

$$H_t: I \longrightarrow X,\ s \mapsto H_t(s),\ 0 \le t \le 1,$$

von Wegen von x nach x mit

$$I \times I \longrightarrow X,\ (s, t) \longrightarrow H_t(s),$$

stetig und $H_0 = \gamma$ und $H_1 = \delta$. Auf diese Weise ist eine Äquivalenz-Relation definiert und die Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$\pi_1(X, x)$$

---

[3] d.h. das Ende von γ ist gleich der Anfang von δ.

bezeichnet. Die Zusammensetzung von Wegen definiert auf diesen Äquivalenzklassen die Struktur einer Gruppe, welche fundamentale Gruppe oder erste Homotopie-Gruppe von X im Punkt x heißt.

1.2.2 Eine Variante der Konstruktion

Man kann diese Definition noch etwas modifizieren, indem man das Einheitsintervall I durch den Einheitskreis

$$S^1 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

ersetzt und diesen als punktierten Raum mit dem ausgezeichneten Punkt $p_0 := (1,0)$ versieht. Die Raum X muß man dann ebenfalls als punktierten Raum mit dem ausgezeichneten Punkt x ansehen, und anstelle der Wege von x nach x muß man die stetigen Abbildungen

$$\gamma: S^1 \longrightarrow X, \gamma(p_0) = x.$$

punktierter Räume betrachten (d.h. der stetigen Abbildung, die die ausgezeichneten Punkte ineinander überführen). Zwei solche Abbildungen heißen homotop, wenn sie in ein und derselben Homotopie vorkommen, d.h. einer Familie

$$H_t: S^1 \longrightarrow X, H_t(p_0) = x, 0 \le t \le 1$$

von stetigen Abbildungen punktierter Räume mit $S^1 \times I \longrightarrow X$, $(s, t) \mapsto H_t(s)$, stetig. Man erhält wieder eine Äquivalenzrelation und die Menge der Äquivalenzklassen ist die oben definierte erste Homotopie-Gruppe.

1.2.3 Höhere Homotopie-Gruppen

Die eben durchgeführte Konstruktion läßt sich auch durchführen, wenn man den punktierten Raum S^1 durch den punktierten Raum

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

mit dem ausgezeichneten Punkt $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ ersetzt. Homotopien von stetigen Abbildungen

$$H_t: S^n \longrightarrow X, H_t(p_0) = x, 0 \le t \le 1,$$

punktierter Räume werden in analoger Weise wie oben definiert und man erhält wieder eine Äquivalenz-Relation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$\pi_n(X, x)$$

bezeichnet und läßt sich für $n > 0$ mit einer Gruppenstruktur versehen (die Definition der Komposition ist komplizierter und soll hier ausgelassen werden). Die so definierte Gruppe heißt n-te Homotopie-Gruppe von X im Punkt x.

Im Fall $n = 0$ ist $\pi_n(X, x)$ nur eine punktierte Menge. Für $n > 1$ ist $\pi_n(X, x)$ eine abelsche Gruppe. Die fundamentale Gruppe ist im allgemeinen nicht abelsch.

1.2.4 Relative Homotopie

Seien X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein topologischer Raum uns $x \in A$ ein Punkt. Wir bezeichnen mit

$$P(X, A, x)$$

die Menge der Wege von X, welche in x beginnen und in einem Punkt von A enden, und versehen diese Menge mit der kompakt-offenen Topologie.[4] Die Gruppe

---

[4] Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq I$ und jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ betrachte man die Menge

$$\pi_n(X, A, x) := \pi_n(P(X, A, x), \gamma_0)$$

heißt dann n-te relative Homotopie-Gruppe von X bezüglich A. Dabei bezeichne γ_0 den konstanten Weg in P(X, A, x).

1.2.5 Eigenschaften der Homotopie-Gruppe

Einige der wichtigsten Eigenschaften sind die folgenden.

1) $\pi_n(X, x)$ hängt funktoriell vom punktierten Raum (X,x) ab.
2) Homotope[5] (stetige) Abbildungen topologischer punktierter Räume induzieren dieselben Abbildungen auf den Homotogie-Gruppen. Insbesondere sind die Homotogie-Gruppen kontrahierbarer Räume trivial.
3) Für jeden topologischen Raum X, jeden Unterraum $Y \subseteq X$ und jeden Punkt $x \in Y$ hat man eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(Y,x) \longrightarrow \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(X,Y,x) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y,x) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_0(Y,y)$$

4) Allgemeiner hat man für jeden topologischen Raum X, Unterräume

$$X \supseteq Y \supseteq Z$$

und Punkte $x \in Z$ eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(Y,Z,x) \longrightarrow \pi_n(X,Z,x) \longrightarrow \pi_n(X,Y,x) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y,Z,x) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_0(X,Y,y)$$

5) Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Faserbündel mit der Faser F, d.h. die Fasern $f^{-1}(y)$ von f lassen sich für alle Punkte $y \in Y$ mit F identifizieren[6] und für jeden Punkt $y \in Y$ gebe es eine offen Umgebung $V \subseteq Y$ derart, daß man die Einschränkung

$$f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

mit der Projektion $V \times F \longrightarrow V$ auf den ersten Faktor identifizieren kann. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(B,b) \longrightarrow \pi_n(X,b) \longrightarrow \pi_n(Y,y) \longrightarrow \pi_{n-1}(B,b) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_0(Y,y)$$

mit $b \in B$ und $y := f(b)$.

6) Die letzte exakte Sequenz besteht im allgemeineren Kontext der schwachen Faserbündel

---

$$\mathrm{App}(K, U) \cap P(X, A, x)$$

der Abbildungen $\gamma: I \longrightarrow X$ von P(X, A, x) mit $\gamma(K) \subseteq U$. Die endlichen Durchschnitte aller Mengen dieser Gestalt sollen dann eine Topologie-Basis des Raums P(X, A, x) bilden.

[5] d.h. solche Abbildungen, die sich stetig ineinander überführen lassen. Zwei stetige Abbildungen

$$f, g: X \longrightarrow X'$$

von topologischen Räumen heißen homotop, wenn es eine Homotopie

$$H_t: X \longrightarrow Y,\ 0 \leq t \leq 1,$$

gibt, d.h. eine stetige Abbildung $X \times I \longrightarrow Y$, $(x, t) \mapsto H_t(x)$, mit

$$H_0 = f \text{ und } H_1 = g.$$

[6] Je nach Wahl der geometrisdchen Kategorie bedeute dies, $f^{-1}(y)$ homöomorph, diffeomorph oder biholomorph zu F u.s.w.

$$f: X \longrightarrow Y,\ B := f^{-1}(b),$$

d.h. für stetige Abbildungen f mit der folgenden Eigenschaft: für jede Homotopie[7]

$$H_t : u \simeq v : D^n \to Y,\ 0 \le t \le 1,$$

zweier stetiger Abildungen u, v: $D^n \to Y$ einer Vollkugel D^n mit Werten in Y und jede Anhebung[8]

$$\tilde{u} : D^n \to X$$

von u entlang f gibt es eine Anhebung

$$\tilde{v} : D^n \to X$$

und eine Homotopie

$$\tilde{H}_t : \tilde{u} \simeq \tilde{v} : D^n \to Y$$

mit $f \circ \tilde{H}_t = H_t$ für jedes t.

7) Satz von Hurwitz. Für jeden punktierten topologischen Raum (X, x) gibt es natürliche Gruppen-Homomorphismen

$$\pi_q(X,x) \longrightarrow H_q(X,\{x\}, \mathbb{Z}).$$

Ist X ein (n-1)-zusammenhängender Raum mit $n \ge 2$, d.h. X ist wegeweise zusammenhängend und alle Homotopie-Gruppen bis zur (n-1)-ten sind trivial, so sind diese Gruppen-Homomorphismen Isomorphismen für $q \le n$ und Epimorphismen für $n < q$.
Im Fall n = 1 ist $H_1(X,\{x\}, \mathbb{Z})$ die Faktorkommutator-Gruppe von $\pi_1(X,x)$.

1.2.6 Vergleich mit der Homologie

Im Gegensatz zur Homologie muß $\pi_n(X,x)$ für n größer als die Dimension von X nicht trivial sein. Allgemein sind die Homotopie-Gruppen sehr viel schwerer zu berechnen als die Homologie-Gruppen.

Selbst für die Sphären $X = S^n$ sind nicht alle Homotopie-Gruppen bekannt. J.-P. Serre hat für die Berechnung der wichtigsten Homotopie-Gruppen der Sphären die Fieldsmedaille erhalten.

Eine besondere Rolle spielen die Homotopie-Gruppen in der Theorie der Vektorraumbündel. Das hängt damit zusammen, daß man für jede glatte Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

glatter Mannigfaltigkeiten und jedes Vektorraumbündel V auf Y ein Vektorraumbündel f*V auf X konstruieren kann, dessen inverses Bild, und daß homotope Abbildungen f isomorphe inverse Bilder liefern. Die Frage nach der Existenz von Vektorraumbündeln auf X führt deshalb auf die Frage nach der Existenz von Homomotopie-Klassen von Abbildungen.

---

[7] d.h. die Abbildung $D^n \times I \longrightarrow Y$, $(d, t) \mapsto H_t(d)$, ist stetig, und es gilt $H_0 = u$, $H_1 = v$.

[8] d.h. $\tilde{u}$ ist stetig, und es gilt $f \circ \tilde{u} = u$.

1.3 K-Theorie

1.3.1 Vektorraumbündel

Ein (reelles) schwaches Vektorraum-Bündel vom Rang n ist eine stetige Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt $y \in Y$ die Faser $f^{-1}(y)$ über y ein (reeller) Vektorraum der Dimension n ist. Der Raum X heißt dann Bündelraum des schwachen Bündels und der Raum Y heißt Basisraum.

Seien jetzt

$$f: X \longrightarrow Y \text{ und } f': X' \longrightarrow Y'$$

zwei (reelle) schwache Vektorraumbündel (welche nicht notwendig vom selbem Rang sein müssen). Ein Morphismus

$$u: f \longrightarrow f'$$

ist eine stetige Abbildung $u: X \longrightarrow X'$ mit $f' \circ u = f$, derart daß die Einschränkungen von u auf die Fasern von f lineare Abbildungen sind. Man kann auch sagen, Morphismen von schwachen (reellen) Vektorraum-Bündeln sind kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & Y & \end{array}$$

stetiger Abbildungen mit der Eigenschaft, daß die Einschränkungen der oberen horizontalen Abbildungen auf die Fasern der beiden anderen Abbildungen linear sind.

Die (reellen) schwachen Vektorraum-Bündel bilden eine Kategorie. Insbesondere ist klar, was man unter einem Isomorphismus schwacher Vektorraum-Bündel zu verstehen hat.

Ein (reelles) Vektorraum-Bündel vom Rang n ist ein (reelles) schwaches Vektorraum-Bündel

$$f: X \longrightarrow Y$$

des Rangs n mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y derart gibt, daß sich die Einschränkung

$$f|_{f^{-1}(V)}: f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

(in der Kategorie der schwachen Vektorraum-Bündel)[9] identifizieren läßt mit einer Projektion

$$W \times V \longrightarrow V,\ (w,v) \mapsto v,$$

wobei W ein (reeller) Vektorraum der Dimension n ist.

Beispiel

Für jeden Vektorraum V und jeden topologischen Raum Y hat

$$Y \times V \longrightarrow Y,\ (y, v) \mapsto y,$$

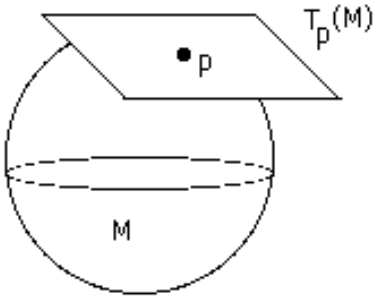
die Struktur eines Vektorraumbündel. Es heißt triviales Bündel auf Y. Jedes Vektorraumbündel kann man sich durch einen Verheftungsprozeß von trivialen Bündeln entstanden denken.

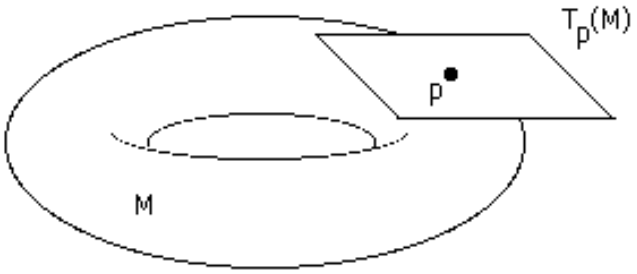
Beispiel

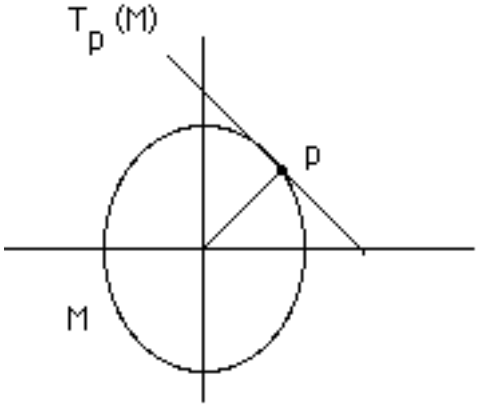
---

[9] d.h. mit Hilfe von Isomorphismen aus dieser Kategorie.

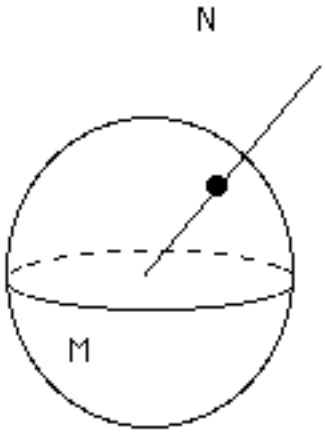
Für jede glatte (reelle) Mannigfaltigkeit M ist das Tangentialbündel ein (reelles) Vektorraumbündel. Tangentialbündel sind im allgemeinen nicht isomorph zum trivialen Bündel.







Beispiel
Für jede glatte Teilmannigfaltigkeit M einer glatten Mannigfaltigkeit N ist das Normalen-Bündel ein Vektorraum-Bündel



Beispiel
Seien K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und

$$\mathbb{P}^n_K = \{[x_0, \dots, x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} - \{(0,\dots,0)\}\}$$

mit

$$[x_0, \dots, x_n] = K \bullet (x_0, \dots, x_n)$$

der reelle oder komplexe projektive Raum. Jeden Punkt dieses Raumes kann man gleichzeitig als Gerade durch den Ursprung des K^{n+1} ansehen. Zu jedem Punkt des Projektiven Raumes gehört also eine Gerade des K^{n+1}. Diese Geraden lassen sich zu einem Geradenbündel (d.h. einem Vektorraumbündel vom Rang 1) zusammenkleben. Sie definieren ein Teilbündel des trivialen Bündels

$$\mathbb{P}^n_K \times K^{n+1}$$

mit dem Bündelraum[10]

$$B := \{(x,p) \in \mathbb{P}^n_K \times K^{n+1} \mid p \in x\}$$

und der Bündelabbildung

$$B \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\ (x,p) \mapsto x.$$

Dieses Bündel heißt auch tautologisches Bündel des projektiven Raums: die Faser über dem Punkt x besteht aus allen Punkten der Geraden x.

Beispiel
Seien K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$G_r(V)$$

die Graßmann-Mannigfaltigkeit der r-dimensionalen linearen Unterräume von V. Jeder Punkt von $G_r(V)$ läßt sich auch als r-dimensionaler Vektorraum auffassen. Die disjunkte Vereinigung dieser Vektorräume ist Bündelraum eines Vektorraumbündels vom Rang r auf $G_r(V)$, welches tautologisches Bündel heißt.

Im Fall r = 1 erhält man einen projektiven Raum, welcher Projektivierung des Vektorraums V heißt.

Beispiel

---

[10] Der Bündelraum besteht aus allen Paaren (x, p) aus einem Punkt x des projektiven Raums und einem Vektor p des K^{n+1} mit der Eigenschaft, daß p auf der Gerade x liegt.

Seien Y ein (regulärer)[11] topologischer Raum und V, V' zwei Vektorraumbündel auf Y. Dann besitzt die Menge

$$\mathrm{Hom}_Y(V, V')$$

der Bündel-Morphismen $V \longrightarrow V'$ selbst die Struktur eines Vektorraumbündels.

Beispiel
Viele Operationen mit Vektorräumen wie der Dualraum, die direkte Summe, die Tensorpotenzen oder die äußeren Potenzen lassen sich auf den Fall von Vektorraum-Bündeln übertragen liefern neue Vektorraumbündel.

Kern und Kokern von Morphismen von Vektorraumbündeln liefern im allgemeinen keine Vektorraumbündel (da sich der Rang der auf den Fasern induzierten linearen Abbildungen von Punkt zu Punkt ändern kann).

1.3.2 Die Konstruktion von Grothendieck

Sei X ein topologischer Raum. Betrachten wir die Menge der Isomorphie-Klassen der (reellen) Vektorraumbündel auf X. Die direkte Summe von Vektorraumbündeln definiert auf dieser Menge die Struktur einer Halbgruppe. Das Vektorraumbündel vom Rang 0 spielt dabei die Rolle des neutralen Elements dieser Halbgruppe.

Auf dieser Menge definieren wir eine Äquivalenz-Relation indem wir für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

von Vektorraumbündeln auf X festlegen, daß das Bündel in der Mitter äquivalent zur Summe der beiden äußeren Bündel sein soll:

$$V \sim V' + V''.$$

Auf die direkte Summe von Vektorraum-Bündeln definiert dann auch auf der Menge der Äquivalenzklassen die Struktur einer Halbgruppe mit neutralem Element.

In derselben Weise, wie man ausgehend von der Halbgruppe der natürlichen Zahlen die Gruppe der ganzen Zahlen konstruiert, kann man durch die Betrachtung der Differenzen[12]

$$V - W$$

von Vektorraumbündeln auf X und die Identifizieren von zwei solchen Differenzen

$$V - W = V' - W'$$

im Fall $V + W' = V' + W$ die Halbgruppe der beschriebenen Äquivalenzklassen in eine Gruppe einbetten, welche Grothendieck-Gruppe von X oder auch K-Gruppe von X heißt und mit

$$K(X)$$

bezeichnet wird.

1.3.3 Eigenschaften

Die wichtigsten Eigenschaften von K(X) sind die folgenden.

1) K(X) hängt (kontravarient) in funktorieller Weise vom topologischen Raum X ab.

---

[11] Um aus lokal definierten Bündelmorphismen solche auf ganz Y definierte zu gewinnen, braucht man für jeden Punkt $y \in Y$ und jede Umgebung $V \subseteq Y$ von y eine stetige Funktion $\varphi: Y \longrightarrow V'$, die in y gleich 1 und außerhalb von V' gleich 0 ist.

[12] Genauer, man betrachtet alle Paare (V, W) und definiert zwei Paare (V, W) und (V', W') als äquivalent, wenn $V + W' = V' + W$ gilt. Auf diese Weise ist eine Äquivalenzrelation definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bilden gerade die Gruppe K(X).

2) Homotope Abbildungen induzieren auf den K-Gruppe dieselben Gruppen-Homomorphismen. Das ist eine Folge der Tatsache, daß für je zwei homotope Abbildungen

$$f, g: X \longrightarrow Y$$

und jedes Vektorraumbündel V auf Y die inversen Bilder f*V und g*V isomorph sind.[13]

3) Man kann exakte Sequenzen, die topologischen Paaren gehören, angeben.

1.3.4 Anwendungen

Die wichtigsten Anwendungen des K-Funktors sind die Beweise

1) des Satzes von Riemann-Roch für beliebige Dimension. Vergleiche
   Hirzebruch: Topological methods in algebraic geometry
   Der Satz von Riemann-Roch gibt an, wieviele rationale Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen-Polstellen-Verhalten auf einer algebraischen Varietät existieen und ist der wichtigest Satz in der Klassisfikationstheorie der vollständigen algebraischen Varietäten.

   Beispiele für seine Anwendungen findet man im vierten und fünften Kapitel des Lehrbuchs[14]

   Hartshorne, R.: Algebraic geometry

2) des Atiyah-Singer-Index-Satzes, vgl.

   Palais, R.S.: Seminar on the Atyiah-Singer index theorem.

   Der Satz beschreibt die Dimension des Lösungsraums eines elliptischen Operators auf den Funktionen einer glatten Mannigfaltigkeit mit Hilfe der geometrischen Daten der Mannigfaltigkeit. Zum Beispiel erhält man für Cauchy-Riemann-Operatoren, daß der Index des Operators nicht vom Operator, sondern nur von der Mannigfaltigkeit abhängt.

1.3.5 Vergleich mit Homologie und Homotopie

Die oben angegeben Eigenschaften des K-Funktors weisen darauf hin, daß dieser Funktor eine gewisse Ähnlichkeit mit den vorher beschriebenen Homologie- bzw. Homotopie-Funktoren hat. Es wurde deshalb schon früh die Frage aufgeworfen, ob K(X) vielleich nur der erste einer ganzen Folge von Funktoren

$$K_i(X)$$

ist, die in ähnlicher Weise wie die Homologie- bzw. Homotopie-Gruppen miteinander zusammenhängen.

---

[13] Bezeichnet $\pi: V \longrightarrow Y$ die Bündelprojektion so ist

$$f^*V = X \times_Y V = \{ (x,v) \in X \times V \mid f(x) = \pi(v) \}$$

gerade das Faserprodukt von X und V über Y. Die Konstruktion sorgt gerade dafür, daß man die Faser von f*V im Punkt $x \in X$ identifizieren kann mit der Faser von V im Punkt f(x) (mit Hilfe der Projektion $f^*V = X \times_Y V \longrightarrow V$ auf den zweiten Faktor).

[14] Gibt es zum Beispiel auf einer glatten projektiven Kurve eine reguläre Funktion mit nur einem Pol, welcher einfach ist, so ist diese Kurve eine projektive Gerade (d.h. vom Geschlecht 1). Glatte projektive Kurven vom Geschlecht 2 liegen in der projektiven Ebene und sind durch eine Gleichung der Gestalt $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ gegeben.

Zu diesem Thema gibt es zahlreiche Monographien, die alle mit unterschiedlichem Erfolg und in verschiedenem Kontext versuchen, eine entsprechende Theorie zu entwickeln. Zum Beispiel:

Bass, H.: Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968
Milnor, J.: Introduction to algebraic K-theory, Princeton, New Jersey, 1971
Karoubi, M.: K-theory, an introduction, Springer, Berlin 1978

Die allgemeinste und abstrakteste - und wahrscheinlich wichtigste - Theorie in diesem Zusammenhang ist die von Quillen

Quillen, D.: Higher algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math. 341 (1973), 77-139

Die Beschreibung der Ergebnisse von Quillen soll Gegenstand dieser Vorlesung sein. Für die Definition der K-Gruppen durch Quillen (und für deren Motivation) fehlt uns noch eine wichtige Konstruktion, die ihren Ursprung in der Homologie-Theorie hat und die wir jetzt angeben wollen.

1.4 Simpliziale Mengen

1.4.1 Simpliziale Homologie

Die in 1.1 eingeführte Homologie-Theorie hat einen Nachteil: die so konstruierten Homologie-Gruppen sind rein theoretische Konstrukte. Die die Gruppen definierenden Komplexe sind so gewaltig groß, daß kaum Hoffnung besteht, diese zu berechnen. Tatsächlich ist die singuläre Homologie nicht die erste Homologie-Theorie, die in der Mathematik auftritt.

In den ersten homologischen Konstruktionen hat man Flächen in Dreiecke zerlegt - man sagt heute, die Flächen wurden trianguliert, und aus den kombinatorischen Daten, die beschreiben, wie die Dreiche miteinander verbunden sind, Gruppen konstruiert. Die so gewonnenen Gruppen waren einfach zu berechnen, führten jedoch zu der Frage, inwieweit sie von der speziellen Wahl der Triangulierung unabhängig waren.

Die ersten Unabhängigkeitsbeweise versuchten zu je zwei Triangulierungen eine gemeinsame Verfeinerung zu konstruieren und waren extrem aufwending. Selbst späte Beweise dieser Art sing etwa Hundert Seiten lang, vgl.

Pontrjagin, L.S.: Grundzüge der kombinatorischen Topologie

1.4.2 Vergleich mit der singulären Homologie

In der modernen Topologie definiert man zwei Funktoren: die singuläre Homologie, die nach Konstruktion nur vom topologischen Raum abhängt und die simpliziele Homologie, die durch die Triangulierung gegeben ist.

Für beide Theorie beweist man die grundlegenen Eigenschaften. Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich, daß sich die simpliziale Homologie in die singuläre abbilden läßt und die beiden Homologien für Simplexe und Sphären übereinstimmen. Die Isomorphie der beiden Theorien ergibt sich jetzt durch Induktion nach der Anzahl der Simplexe mit Hilfe der sogenannte exakten Meyer-Vietoris-Sequenz.

$$H_n(\text{Triangulierung von } X) \longrightarrow H_n(X)$$

Die Konstruktion der simplizialen Homologie, die auf dem Begriff des Simplizialkomplexes beruht, ist inzwischen weitgehend verallgemeiner worden, wobei heute die sogenannten simplizialen Mengen an die Stellen der Simplizialkomplexe getreten sind.

1.4.3 Kombinatorische Simplizialkomplexe

Ein Simplizialkomplex ist eine Menge K, deren Elemente Ecken heißen, zusammen mit einer Mengen von nicht-leeren endlichen Teilmengen, welche Simplexe von K heißen. Dabei gelte:

1) Jede nicht-leere Teilmenge eines Simplex von K ist ein Simplex von K.

2) s, t sind Simplexe von K, $s \cap t$ nicht leer $\Rightarrow$ $s \cap t$ ist Simplex von K.

Ein Simplex s von K heißt n-Simplex oder auch n-dimensionales Simplex, wenn es aus n+1 Ecken besteht.

Sind s und t Simplexe von K mit $s \subseteq t$, so sagt man, s ist eine Seite von t.

1.4.4 Geometrische Realisierung

Jeder Simplizialkomplex K definiert einen topologischen Raum

$$|K|,$$

welcher geometrische Realisierung von K heißt.

Zur Konstruktion von X betrachten wir den von den Ecken von K frei erzeugten reellen Vektorraum

$$V := F_{\mathbb{R}}(K) = \oplus_{e \in K} \mathbb{R}e,$$

d.h. die Ecken von K bilden eine Basis dieses Vektorraums. Jeder Vektor in diesem Vektorraum ist eine endliche Linearkombination dieser Ecken:

$$v = \sum_{e \in K} x_e \bullet e \,,\; x_e \in \mathbb{R} \text{ und gleich 0 für fast alle e.}$$

Wir definieren den Träger von v als die Menge

$$\mathrm{Supp}(v) := \{e \in K \mid x_e \neq 0\}$$

der Ecken, die mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommen. Dies ist eine endlich Teilmenge von K. Wir definieren |K| als die Menge

$$|K| = \{v = \sum_{e \in K} x_e \bullet e \mid \sum_{e \in K} x_e = 1,\, 0 \leq x_e \text{ für jedes e und } \mathrm{Supp}(v) \in K \}$$

Für jedes n-Simplex $s \in K$ ist die Menge

$$|s| := \{ \sum_{e \in s} x_e \bullet e \mid \sum_{e \in K} x_e = 1,\, 0 \leq x_e \}$$

eine Teilmenge von |K|. Weil die Ecken von K linear unabhängig sind, ist |s| homöomorph zum n-dimensionalen Standard-Simplex,

$$|s| \quad \approx \quad \Delta_n = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i \,,\, x_0 + \ldots + x_n = 1\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i e_i \mapsto (x_0, \ldots, x_n),$$

wenn s aus den Ecken $e_0, \ldots, e_n$ besteht.[15] Die Realisierung |K| besteht gerade aus der Vereinigung aller |s|,

$$|K| = \bigcup_{s \in K} |s|.$$

1.4.5 Die Topologie der Realisierung

Für jedes Simplex s von K liegt |s| in einem endlich-dimensionalen linearen Unterraum des reellen Vektorraums V. Wir versehen |s| mit der Unterraum-Topologie dieses endlich-dimensionalen reellen Vektorraums. Die Topologie von |K| sei die stärkste Topologie, welche auf jedem |s| die gerade beschriebene Topologie induziert, d.h. eine Teilmenge $U \subseteq |K|$ sei genau dann offen, wenn für jedes $s \in K$ der Durchschnitt $U \cap |s|$ offen in |s| ist.

1.4.6 Die Realisierung als Faktoraum

Für jede Seite s eines Simplex t ist |s| eine Teilmenge von |t|. Identifizieren man |s| und |t| in der oben beschriebenen Weise mit den entsprechenden Standard-Simplexen, so entpricht die natürliche Einbettung

$$|s| \hookrightarrow |t|$$

gerade der Einschränkung einer injektiven linearen Abbildung

$$\varphi_{s,t}: \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$$

(die durch die Einführung einer Wohlordnung auf K eindeutig festgelegt sind). Diese Abbildungen gestatten eine alternative Beschreibung der geometrischen Realisierung.

für jedes n-Simplex $s \in K$ wähle man eine Kopie des n-dimensionalen Standard-Simplex

$$\Delta(s) := \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i, x_0 + \ldots + x_n = 1\}$$

Der Raum |K| läßt sich dann als disjunkte Vereinigung der $\Delta(s)$ modulo einer Äquivalenz-Relation

$$X = \vee_{s \in K} \Delta(s) / \sim$$

beschreiben. Zwei Punkte

$$x \in \Delta(s) \text{ und } x' \in \Delta(s') \text{ mit } s,s' \in K$$

sind dann in X zu identifizieren, wenn $s \cap s'$ nicht leer ist und es einen Punkt

$$y \in \Delta(s \cap s)$$

gibt mit

$$\varphi_{s \cap s',s}(y) = x \text{ und } \varphi_{s \cap s',s'}(y) = x'.$$

1.4.7 Simplizialkomplexe als Funktoren

Diese gerade angegebene Beschreibung von X = |K| ist die Basis für eine Verallgemeinerung. Dazu beachte man, daß jeder mit einer Wohlordnung versehene Simplizialkomplex einen (kontravarianten) Funktor.

$$K: \Delta \longrightarrow \text{Ens}$$

---

[15] Wir können unter den endlich vielen möglichen solchen Abbildungen noch eine auszeichnen, indem wir die Menge K wohlordnen und fordern $e_0 < \ldots < e_n$

definiert, der ebenfalls mit K bezeichnet werde. Dabei sei Δ die Kategorie deren Objekte die Mengen

$$[n] = \{1,2, \ldots , n\}$$

mit n eine natürliche Zahl und deren Morphismen die monotonen Abbildungen sind.
Ein geordnetes n-Simplex von K sei ein (n+1)-Tupel

$$(e_0, \ldots , e_n)$$

von Ecken von K mit der Eigenschaft, daß $\{e_0, \ldots , e_n\}$ ein Simplex von K ist und

$$e_0 \leq \ldots \leq e_n$$

gilt. Wir lassen dabei den Fall zu, daß eine Ecke mehrfach auftritt, in welchen wir sagen, daß Sinplex sei singulär oder auch degeneriert. Wir setzen

$$K([n]) = \text{Menge der geordneten n-Simplexe von K.}$$

Zur Definition des Funktors K müssen wir noch für jede monotone Abbildung

$$\varphi: [m] \longrightarrow [n]$$

eine Abbildung

$$K(\varphi):K([n]) \longrightarrow K([m])$$

angeben. Zur Definition von $K(\varphi)$ beachten wir, daß φ die Zusammensetzung einer monotonen Surjektion und einer monotonen Injektion ist. Da K ein Funktor sein soll, reicht es also $K(\varphi)$ für injektive und für surjektive φ anzugeben. Im injektiven Fall ist φ Zusammensetzung von monotonen Injektionen der Gestalt

$$[m] \longrightarrow [m+1] \longrightarrow [m+2] \longrightarrow [n],$$

wir können also annehmen, n = m+1. Im surjektiven Fall ist φ eine Zusammensetzung von monotonen Surjektionen der Gestalt

$$[m] \longrightarrow [m-1] \longrightarrow [m-2] \longrightarrow [n],$$

wir können also annehmen, m = n + 1. Wir haben damit die Definition von $K(\varphi)$ auf die Fälle

$$\varphi: [n-1] \hookrightarrow [n] \text{ und } \varphi: [n+1] \twoheadrightarrow [n] \qquad (1)$$

Im ersten Fall ist φ durch das $i \in [n+1]$ festgelegt, welches nicht im Bild liegt. Im zweiten Fall ist φ durch $i \in [n+1]$ festgelegt, welches dasselbe Bild wie sein Nachfolger hat.
Sei jetzt

$$s = (e_1,\ldots,e_n) \in K([n])$$

(und $e_1 < \ldots < e_n$). Im ersten Fall setzen wir[16]

$$K(\varphi)(s) := (e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_n)$$

und im zweiten sei[17]

$$K(\varphi)(s) := (e_1,\ldots,e_i,e_i,\ldots,e_n).$$

In der Theorie der simplizialen Mengen wird gezeigt, daß auf diese Weise der Funktor K korrekt definiert wird.

Die Morphismen (1) bilden in einem gewissen Sinne ein Erzeugendensystem für die Morphismen der Kategorie Δ. In der Theorie der simplizialen Mengen werden unter anderem auch die Relationen zwischen diesen Erzeugenden beschrieben.

---

[16] $K(\varphi)$ ordnet jedem n-Simplex von K auf dessen i-te Seite zu.

[17] Die Abbildung heißt i-te Entartungsabbildung. Sie zum Simplex eine Kante der Länge Null hinzu.

1.4.8 Begriff der simplizialen Menge

Eine simpliziale Menge ist ein kontravarianter Funktor

$$X: \Delta \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

der Kategorie der Mengen $[n] = \{0,1,...,n\}$ mit $n = 0,1,2,3,...$ und schwach monoton steigenden Abbildungen mit Werten in der Kategorie Ens der Mengen. Die Elemente der Menge

$$X_n := X([n])$$

heißen n-Simplexe oder auch n-dimensionale Simplexe von X.

Für jedes $i \in [n]$ bezeichnen wir mit

$$\partial_i: [n-1] \longrightarrow [n]$$

die injektive monoton wachsende Abbildung, für welche i nicht im Bild liegt. Wir nenen diese Abbildung auch i-te Seitenabbildung (in der Kategorie Δ). Außerdem bezeichnen wir für jedes $i \in [n]$ mit

$$\varepsilon_i: [n+1] \longrightarrow [n]$$

die sujektive monoton wachsende Abbildung, für welche i und i+1 dasselbe Bild haben. Wir nenne diese Abbildung auch i-te Entartungsabbildung (in der Kategorie Δ).
Die Abbildung

$$\partial^i = X(\partial_i): X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

heißt i-te Seitenabbildung von X. Das Bild des n-Simplex σ von X bei dieser Abbildung heißt i-te Seite dieses Simplex. Die Abbildung

$$\varepsilon^i = X(\varepsilon_i): X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

heißt i-te Entartungsabbildung von X. Das Bild des n-Simplex σ von X bei dieser Abbildung heißt i-te Entartung dieses Simplex.

Bemerkungen

(i) Die Simplexe von X_n sollte man sich als Bezeichnungen oder Namen für die n-dimensionalen Simplexe eines geometrischen Objekts vorstellen.

(ii) Eine simpliziale Menge X ist gegeben, wenn die folgenden Daten vorliegen.

a) Für jede nicht negative ganze Zahl n eine Menge

$$X_n$$

welche Menge der (singulären) n-Simplexe von X heißt.

b) Für jedes $i \in [n]$ eine Abbildung

$$\partial^i = \partial^i_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

welche i-te Seitenabbildung von X heißt.

c) Für jedes $i \in [n]$ eine Abbildung

$$\varepsilon^i = \varepsilon^i_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

welche i-te Entartungsabbildung von X heißt.

Dabei müssen die ∂_i und ε_i den folgenden Bedingungen genügen.

$$\partial^j_{n-1}\partial^i_n = \partial^{i-1}_{n-1}\partial^j_n \qquad \text{für } i < j$$

$$\varepsilon^j_{n+1}\varepsilon^i_n = \varepsilon^{i+1}_{n+1}\varepsilon^j_n \qquad \text{für } i \le j$$

$$\partial^i_n\varepsilon^j_{n-1} = \begin{cases} \varepsilon^{j-1}_{n-2}\partial^i_{n-1} & \text{für } i < j \\ id_{[n-1]} & \text{für } i=j \text{ und für } i=j+1 \\ \varepsilon^j_{n-2}\partial^{i-1}_{n-1} & \text{für } i > j+1 \end{cases}$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so definieren die Abbildungen ∂^i und ε^i eine simpliziale Menge.

1.4.9 Geometrische Realisierung einer simplizialen Menge

Sei

$$X: \Delta \longrightarrow Ens$$

eine simpliziale Menge. Die geometrische Realisierung von X ist definiert als der topologische Raum mit der Punktmenge

$$|X| = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_n) \,/R$$

wobei R die kleinste Äquivalenzrelation ist, bei der die Punkte

$$(x,\sigma) \in \Delta_n \times X_n \text{ und } (y,\tau) \in \Delta_m \times X_m$$

identifiziert werden,

$$(x,\sigma) \equiv (y,\tau) \bmod R,$$

falls es eine schwach wachsende Abbildung $f:[m] \to [n]$ gibt mit

$$X(f)\sigma = \tau \text{ und } \Delta_f(x) = y,$$

symbolisch

$$(y,\tau) \overset{f}{\mapsto} (x,\sigma)$$

Die Topologie von |X| ist definiert als die stärkste Topologie auf X, bei der die natürliche Abbildung

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_n) \to |X|$$

stetig ist. Eine Teilmenge U von |X| ist also genau dann offen, wenn alle Durchschnitte

$$U \bigcap \Delta_n \times \{x\} \text{ mit } x \in X_n$$

offen sind.

1.4.10 Beispiel: der Nerv einer Überdeckung

Seien Y ein topologischer Raum und

$$U=(U_\alpha)_{\alpha \in A}$$

eine Überdeckung von Y. Wir setzen

$$X_n := \{(\alpha_0,...,\alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$

$$X(f): X_n \to X_m, (\alpha_0,...,\alpha_n) \mapsto (\alpha_{f(0)},...,\alpha_{f(m)})$$

für f:[m] → [n] schwach monoton.

Bemerkungen
Diese simpliziale Menge spiegelt die kombinatorische die Struktur der Überdeckung wider. Man kann zeigen, ist die Überdeckung lokal endlich und sind alle nichtleeren Durchschnitte $U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$ kontrahierbar, so ist die geometrische Realisierung |X| homotopie-äquivalent zu Y, und hat insbesondere dieselben Homotopie und Homologie-Gruppe wie Y. Die kombinatorischen Daten beschreiben also die Topologie von Y ziemlich gut. Die nachfolgende Konstruktion ist ähnlich beschaffen.

1.4.11 Beispiel: Simpliziale Mengen von singulären Simplexen

Sei X ein topologischer Raum. Wir setzen

$$X_n := \{\varphi : \Delta_n \to Y \mid \varphi \text{ stetig}\}$$

$$X(f): X_n \to X_m, \varphi \mapsto \varphi \circ \Delta_f$$

für f:[m] → [n] schwach wachsend. Dabei sei Δ_f die lineare Abbildung

$$\Delta_f: \Delta_m \longrightarrow \Delta_n, e_i \mapsto e_{f(i)}$$

der zugehörigen Standard-Simplexe. Sie wird auch f-Seiten-Abbildung genannt.
Bemerkungen

(i) Die Mengen X_n sind im allgemeinen extrem groß. Es ist deshalb sinnvoll, falls es auf Y eine zusätzliche Struktur gibt, nur solche singulären Simplexe zu betrachten, die mit dieser Struktur verträglich sind, zum Beispiel die glatten singulären Simplexe, falls Y eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, oder die linearen singulären Simplexe, falls Y ein Polyeder ist.

(ii) Sei insbesondere Y ein triangulierter Raum, d.h. ein Raum, zusammen mit einem Homöomorphismus

$$|K| \longrightarrow Y,$$

wobei |K| die Realisierung eines Simplizialkomplexes ist. Wir identifizieren Y mit Hilfe dieses Homöomorphismus mit |K|.

Dann ist Y die Vereinigung der offenen Simplexe (einschließlich der Ecken). Ein singuläres Simplex $\varphi:\Delta_n \to Y$ heißt verträglich mit der Triangulierung h von Y, wenn $\varphi(\Delta_n)$ ein Simplex dieser Triangulierung und die Abbildung $\varphi:\Delta_n \to \varphi(\Delta_n)$ linear ist und die Ordnung der Ecken erhält. Wir setzen

$$X'_n := \{\varphi:\Delta_n \to Y \mid \varphi \text{ stetig und verträglich mit h}\}$$

$$X(f): X'_n \to X'_m, \varphi \mapsto \varphi\circ\Delta_f$$

für $f:[m] \to [n]$ schwach wachsend.[18]

Wir haben so in natürlicher Weise zu jeder Triangulierung eine simpliziale Menge gefunden, die dieselbe geometrische Realisierung hat.

1.4.12 Beispiel: die simpliziale Menge Δ[p]

Wir setzen

$$\Delta[p]_n = \{g:[n] \to [p] \mid g \text{ schwach wachsend}\}$$

$$\Delta[p](f): \Delta[p]_n \to \Delta[p]_m, g \mapsto g\circ f$$

für $f:[m] \to [n]$ schwach wachsend.

Mit anderen Worten, Δ[p] ist die simpliale Menge der singulären Simplexe von Δ_p die mit der natürlichen Triangulierung von Δ_p verträglich sind. Insbesondere ist die geometrische Realisierung von Δ[p] gerade Δ_p selbst.

1.4.13 Beispiel: der klassifizierenede Raum einer Gruppe

Sei G eine Gruppe. Wir setzen für n=0,1,2,...

$$(BG)_n := G^n = G\times...\times G \text{ (n mal)},$$

wobei $G^0 := \{e\}$ sei, und für jede schwach monoton wachsende Funktion $f:[m] \to [n]$ sei BG(f) die Abbildung

$$BG(f): (BG)_n \to (BG)_m, (g_1,...,g_n) \mapsto (h_1,...,h_m)$$

mit

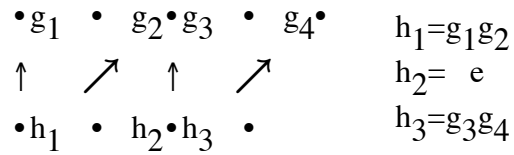
$$h_i := \begin{cases} \prod_{f(i-1)<j\le f(i)} g_j & \text{falls } f(i-1)<f(i) \\ e & \text{falls } f(i-1)=f(i) \end{cases}$$

Das nachfolgende Diagramm illustriert diese Formel im Fall

$$f:[3] \to [4],\ 0\mapsto 0, 1\mapsto 2, 2\mapsto 2, 3\mapsto 4.$$

---

[18] Δ_f wie in 1.4.8.



Die geometrische Realisierung |BG| heißt klassifizierender Raum der Gruppe G.

1.4.14 Nicht-entartete Simplexe

Seien X eine simpliziale Menge und $\sigma \in X_n$ ein n-Simplex von X. Dann heißt σ entartetes Simplex von X, wenn es eine schwach wachsende Surjektion $f:[n] \to [n']$ mit $n>n'$ und ein n'-Simplex $\sigma' \in X_{n'}$ gibt mit $\sigma=X(f)\sigma'$. Die Menge aller nicht-entarteten n-Simplexe von X wird mit $X_{(n)}$ bezeichnet,

$$X_{(n)} := \{\sigma \in X_n \mid \sigma \text{ nicht entartet}\}.$$

Bemerkungen

(i) Ist $\sigma \in X_n$ ein nicht-entartetes Simplex und gilt $\sigma=X(f)\sigma'$ für irgendein σ' und irgendein f, dann muß f eine Injektion sein.

(ii) Sei X eine simpliziale Menge. Dann ist die Einschränkung

$$\tau : \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n \times X_{(n)} \to |X|$$

der natürlichen Abbildung τ auf die disjunkte Vereinigung der offenen nicht-entarteten Sinplexe eine bijektive Abbildung. Diese Aussage ist eine Konsequenz der nachfolgenden Bemerkung.

(iii) Seien X eine simpliziale Menge und $\sigma \in X_n$ ein Simplex. Dann gibt es genau eine schwach wachsende Surjektion $f:[n] \to [n']$ und genau ein nicht-entartetes Simplex $\sigma' \in X_{n'}$ mit $\sigma = X(f)\sigma'$.

1.4.15 Homologie einer simplizialen Menge

Sei X eine simpliziale Menge. Wir definieren die Gruppe der n-Ketten von X als die freie abelsche Gruppe, welche von X_n erzeugt wird:

$$C_n(X) = \oplus_{\sigma \in X_n} \mathbb{Z}\sigma$$

Für jedes n = 0, 1, 2, ... definiert die i-te Seitenabbildung ∂^i von X durch lineare Fortsetzung einen Gruppen-Homomorphismus,

$$\partial^i: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X),$$

welcher ebenfalls mit ∂^i bezeichnet wird. Die alternierende Summe dieser Gruppen-Homomorphismus

$$d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial^i: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

heißt n-ter Rand-Operator von X. Die Elemente im Kern

$$Z_n(X) := \mathrm{Ker}(d: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X))$$

dieses Rand-Operators heißen n-Zyklen von X und die im Bild

$$B_n(X) := \mathrm{Im}(d: C_{n+1}(X) \longrightarrow C_n(X))$$

heißen n-Ränder von X. Es ist leicht zu sehen, daß man durch doppeltes Anwenden des Randoperators stets 0 erhält, d.h. es gilt

$$B_n(X) \subseteq Z_n(X)$$

Die $C_n(X)$ bilden zusammen mit den Randoperatoren einen Komplex

$$(C_*(X), d),$$

dessen Homologie mit

$$H_n(X) := H_n(C_*(X)) := Z_n(X)/B_n(X).$$

bezeichnet wird und n-te Homologie der simplizialen Menge X heißt.

Bemerkungen

(i) Die Homologie einer simplizialen Menge hat dieselben Eigenschaften, wie wir sie von der singulären und simplizialen Homologie einer topologischen Raums bzw. eines triangulierten topologischen Raums kennen.

(ii) Wir wollen an dieser Stelle noch eine Art Dualisierung der Homologie-Theorie einführen, die im Prinzip dieselben Eigenschaften hat, die etwas weniger geometrisch ist, mit der man aber sehr oft besser rechnen kann. Im Kontext differenzierbare Mannigfaltigkeiten kann man diese Theorie oft mit Hilfe von Integralen beschreiben.[19]

1.4.16 Kohomologie einer simplizialen Menge

Sei X eine simpliziale Menge. Wir wenden auf den Komplex

$$C_*(X): \ldots \longrightarrow C_{n+1}(X) \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0(X) \longrightarrow 0$$

der Ketten von X den kontravarianten Hom-Funktor $\mathrm{Hom}_{Ab}(\,?\,, \mathbb{Z})$ an und erhalten einen Komplex

$$C^*(X): 0 \longrightarrow C^0(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^{n-1}(X) \longrightarrow C^n(X) \longrightarrow C^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

mit $C^n(X) = \mathrm{Hom}_{Ab}(C_n(X), \mathbb{Z})$, den man Komplex der Koketten von X nennt und dessen (Ko-) Homologie

$$H^n(X) := H^n(C^*(X)) = H_{-n}(C^*(X))$$

Kohomologie von X heißt.

Bemerkungen

(i) Als Zusammensetzung von Funktoren sind die Kohomologie-Gruppen Funktoren. Sie haben die zu den Eigenschaften der Homologie analogen Eigenschaften.

(ii) Wie im Fall der singulären Homologie topologischer Räume, kann man anstelle der freien abelschen Gruppen auch formale Linearkombinationen mit Koeffizienten aus einer beliebigen abelschen Gruppe betrachten. Im folgenden werden wir einer noch etwas allgemeineren Konstruktion begegnen, und wollen diese deshalb an dieser Stelle einführen. Dazu benötigen wird den Begriff des lokalen Koeffizientensystems.

1.4.17 Lokale Koeffizienten

Sei X eine simpliziale Menge. Ein homologisches System von lokalen Koeffizienten auf X besteht aus einer Familie

---

[19] Mit Hilfe der De-Rham-Kohomologie.

$$\{A_\sigma\}$$

von abelschen Gruppen, welche indiziert wird von der Mengen aller Simplizes von X, und einer Familie von Gruppen-Homomorphismen

$$A(f,\sigma): A_\sigma \longrightarrow A_{X(f)\sigma}$$

welche induziert wird durch die Morphismen f: [m] $\longrightarrow$ [n] der Kategorie Δ und die Simplexe $\sigma \in X_n$,d.h. durch die schwach monoton steigenden Abbildungen der Gestalt f: [m] $\longrightarrow$ [n]. Dabei gelte

$$A(id, \sigma) = id_{A_\sigma}$$

$$A(fg, \sigma) = A(g, X(f)\sigma) \circ A(f, \sigma)$$

d.h. die Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & A_{X(f)\sigma} \\ & \nearrow & \searrow \\ A_\sigma & \longrightarrow & A_{X(fg)\sigma} \end{array}$$

sollen kommutativ sein.

Ein kohomologisches System von lokalen Koeffizienten auf X besteht aus einer Familie

$$\{A_\sigma\}$$

von abelschen Gruppen, welche indiziert wird von der Mengen aller Simplizes von X, und einer Familie von Gruppen-Homomorphismen

$$A(f,\sigma): A_{X(f)\sigma} \longrightarrow A_\sigma$$

welche induziert wird durch die Morphismen f: [m] $\longrightarrow$ [n] der Kategorie Δ und die Simplexe $\sigma \in X_n$, d.h. durch die schwach monoton steigenden Abbildungen der Gestalt f: [m] $\longrightarrow$ [n]. Dabei gelte

$$A(id, \sigma) = id_{A_\sigma}$$

$$A(fg, \sigma) = A(f, \sigma) \circ A(g, X(f)\sigma)$$

d.h. die Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & A_{X(f)\sigma} \\ & \swarrow & \nwarrow \\ A_\sigma & \longleftarrow & A_{X(fg)\sigma} \end{array}$$

sollen kommutativ sein.

Beispiel: konstantes lokales System

Für jede abelsche Gruppe A hat man ein (ko-)homologisches lokales Koeffizientensystem mit

$$A_\sigma = A$$

für jedes σ und

$$A(f, \sigma) = id$$

für jedes Paar (f, σ). Es heißt konstantes lokales System.

Beispiel: ein lokales System auf dem Nerv einer Überdeckung

Seien Y ein topologischer Raum, $U = (U_\alpha)$ eine offene Überdeckung von Y und

$$X$$

der Nerv der Überdeckung U. Dann kann man wie folgt ein kohomologisches lokales System von Koeffizienten auf X definieren. Für je n+1 Indizes α setzen wir

$A_{\alpha_0,...,\alpha_n}$:= additive Gruppe der stetigen reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf dem Durchschnitt $U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$.

$A(f, (\alpha_0,...,\alpha_n))$: $A_{\alpha_{f(0)},...,\alpha_{f(m)}} \longrightarrow A_{\alpha_0,...,\alpha_n}$

ordne jeder auf $U_{\alpha_{f(0)}} \cap ... \cap U_{\alpha_{f(m)}}$ definierten Funktion deren Einschränkung auf $U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$ zu (für monoton steigendes f:[m]⟶[n]).

Bei der Überprüfung der Axiome eines kohomologischen lokalen Systems wird lediglich die Tatsache verwendet, daß man beim Übergang zu Summen und zu Einschränkungen den Bereich der stetigen Funktionen nicht verfäßt. Man bekommt also weitere Beispiele für lokale Systeme, wenn man die stetigen Funktionen durch andere Funktionenklassen ersetzt, die sich ebenfalls so verhalten.

Zum Beispiel kann man auf glatten Mannigfaltigkeiten glatte Funktionen verwenden oder auf komplexen Mannigfaltigkeiten holomorphe Funktionen. Oder stetige Funktionen ohne Nullstellen mit der Multiplikation als Operation.

Beispiel: ein lokales System auf dem klassifizierenden Raum einer Gruppe

Seien G eine nicht-notwendig abelsche Gruppe und

$$M$$

ein linker A-Modul, d.h. ein additive Gruppe, auf welcher G duch Automorphismen operiert. Dann kann man wie folgt ein kohomologisches lokales System von Koeffizienten auf der simplizialen Menge BG definieren. Für jedes Tupel x von Elementen aus G setzen wir

$$A_x = M$$

Weiter sei für jede monoton wachsende Abbildung f: [m] ⟶ [n], jedes n-Tupel

$$x = (g_1, \dots, g_n)$$

von Elementen aus G die Abbildung

$$A(f,x): M \longrightarrow M$$

wie folgt definiert. Für $m \in M$ setzen wir

$$A(f,x)m = hm \text{ mit } h := \prod_{j=1}^{f(0)} g_j$$

(d.h. wir multiplizieren mit dem Produkt der Koordinaten von x, die in BG(f)x nicht mehr vorkommen). Setzt man stattdessen

$$A(f,x)m = h^{-1}m,$$

so erhält man ein homologisches System von lokalen Koeffizienten auf X.

1.4.18 Homologie und Kohomologie mit lokalen Koeffizienten

Seien X eine simplizialen Menge und A ein homologisches System von lokalen Koeffizienten auf X. Dann bezeichne

$$C_n(X, A) = \oplus_{\sigma \in X_n} A_\sigma \bullet \sigma$$

die Menge der formalen endlichen Linearkombinationen

$$c := \sum_{\sigma \in X_n} a(\sigma) \bullet \sigma \text{ mit } a(\sigma) \in A_\sigma.$$

Wir erhalten so eine abelsche Gruppe, deren Elemente n-Ketten von X mit Koeffizienten in A heißen. Auf diesen n-Ketten kann man wieder die i-te Seitenabbildung wie folgt definieren:

$$\partial^i(c) := \sum_{\sigma \in X_n} A(\partial^i, \sigma)(a(\sigma)) \bullet X(\partial^i)\sigma.$$

Die alternierende Summe dieser Seitenabbildungen heißt wieder Randoperator und ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$d: C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A).$$

Auf Grund der funktoriellen Eigenschaften des lokalen System A ist die Zusammensetzung von zwei Randoperationen Null, d.h. wir erhalten einen Komplex

$$(C_*(X, A), d).$$

Die Homologie dieses Komplexes wird mit

$$H_n(X, A) := H_n(C_*(X,A))$$

bezeichnet und heißt n-te Homologie von X mit Koeffizienten im lokalen System A.

Sie jetzt B ein kohomologisches System von lokalen Koeffizienten auf X. Dann bezeichne

$$C^n(X, B) := \text{Menge der Funktionen f auf } X_n \text{ mit } f(\sigma) \in B_\sigma \text{ für jedes } \sigma \in X_n.$$

Wir erhalten so eine abelsche Gruppe, deren Elemente n-Koketten von X mit Koeffizienten in A heißen. Auf diesen n-Koketten kann man wie folgt für jedes $i \in [n]$ ein sogenannte i-te Koseiten-Abbildung

$$\partial^i: C^n(X, B) \longrightarrow C^{n+1}(X, B)$$

definieren. Für jede n-Kokette f und jedes (n+1)-Simplex $\sigma \in X_{n+1}$ von X setzen wir

$$\partial^i(f)(\sigma) := B(\partial^i, \sigma)(f(X(\partial^i)\sigma))$$

Die alternierende Summe dieser Koseiten-Abbildungen definiert einen Gruppen-Homomorphismjus

$$d: C^n(X, B) \longrightarrow C^{n+1}(X, B)$$

dessen zweimaliges Ausführen wieder die Null-Abbildung liefert, d.h.
(C*(X, B), d)
ist ein Komplex. Dessen Kohomologie wird mit

$$H^n(X, A) := H^n(C^*(X, A))$$

bezeichnet und heißt n-te Kohomologie von X mit Koeffizienten im lokalen System A.

4.15 Literatur zur Theorie der simplizialen Mengen

Gabriel, P., Zisman, M.: Calculus of fractions and homotopy theory
Nicht einfach zu lesen, die Gestaltung ist ziemlich technisch.
Gelfand, S.I., Manin, Ju.I.: Methods of homological algebra
Gut zu lesen, alle technischen Details sind in die Übungsaufgaben verschoben.
Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra
Gut zu lesen, hat Überblick-Charakter, bei technischen Details wird auf May verwiesen.
May, J.P.:Simplicial objects in algebraic topology, Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, New Jersey, 1967
Besteht fast nur aus technischen Details, Preisverschiebung von 3.91 Dollar 1967 auf ca 22 Dollar 2013.

2. Die allgemeine Theorie 5

2.1 Der klassifizierende Raum einer kleinen Kategorie 5

2.1.1 Definition und Beispiele

2.1.1.1 Vorbemerkung

In den nachfolgenden Abschnitten dieser Arbeit werden die K-Gruppen als Homotopie-Gruppen des klassifizierenden Raums einer gewissen kleinen Kategorie definiert. Im vorliegenden ziemlich langen Abschnitt sammeln wir verschiedene Fakten zum Funktor des klassifizierenden Raums, welche wir benötigen werden. Diese Fakten sind wohlbekannt mit Ausnahme des wichtigen Theorems B, welches die Homotopie-Faser der Abbildung klassifizierender Räume zu einem Funktor unter gewissen Bedingungen beschreibt. Es wird später benutzt um lange exakte Sequenzen in der K-Theorie aus der langen Homotopie-Sequenz einer Abbildung abzuleiten.

2.1.1.2 Der Nerv einer kleinen Kategorie

Sei C eine kleine Kategorie. Der Nerv von C wird mit

$$NC$$

bezeichnet und ist definiert als die (semi-) simpliziale Menge[20], deren p-Simplexe die Diagramme in C von der Gestalt

$$X_0 \to X_1 \to ... \to X_p$$

sind. Die i-te Seite (bzw. Entartung) dieses Simplex erhält man durch Entfernen des Objekts X_i (bzw. durch Ersetzen des Objekts X_i durch den Morphismus $id:X_i \to X_i$) in offensichtlicher Weise.

---

[20] Bezeichne Δ die Kategorie, deren Objekte die Mengen der Gestalt

$$[n] := \{0,1,2,...,n\}$$

mit n = 0, 1, 2, 3, ... sind und deren Morphismen

$$f: [n] \to [m]$$

die (nicht notwendig streng) monoton steigenden Abbildungen. Eine simpliziale Menge ist ein kontravarianter Funktor

$$F.\Delta^{op} \to Ens.$$

Die Elemente von F([n]) heißen dann n-Simplexe von F.

2.1.1.3 Der klassifizierende Raum einer kleinen Kategorie

Sei C eine kleine Kategorie. Der klassifizierende Raum vonC wird mit

$$BC$$

bezeichnet und ist definiert als die geometrische Realisierung von NC.

Bemerkung

BC ist ein CW-Komplex, dessen p-Zellen in einer 1-1-Korrespondenz zu den nicht-entarteten p-Simplexen des Nervs NC stehen, d.h. den p-Simplexen, in denen kein identischer Morphismus vorkommt (vgl. Segal [1], Milnor [1]).

2.1.1.4 Beispiel: halbgeordnete Mengen

Sei J eine halbgeordnete Menge, die in der üblichen Weise als Kategorie aufgefaßt werde. Dann ist BJ der simpliziale Komplex (mit der schwachen Topologie), dessen Ecken die Elemente von J sind und dessen Simplexe die linear geordneten nicht-leeren endlichen Teilmengen von J sind.

Bemerkungen

(i) Ist umgekehrt K ein simplizialer Komplex und ist J die halbgeordnete Menge der Simplexe von K, so ist BJ die baryzentrische Unterteilung von K.

(ii) Jeder simpliziale Komplex mit der schwachen Topologie ist somit homöomorph zum klassifizierenden Raum einer halbgeordneten Menge (tätsächlich von vielen solchen Mengen).

(iii) Da jeder CW-Komplex - wie bekannt - homotopie-äquivalent zu einem simplizialen Komplex ist, wird somit jeder interessante Homotopie-Typ durch den klassifizierenden Raum einer halbgeordneten Menge realisiert.

2.1.1.5 Beispiel: Gruppen

Sei G eine Gruppe und betrachten wir G in der üblichen Weise[21] als Kategorie mit nur einem Objekt. Dann ist BG gerade der klassifizierende Raum der diskreten Gruppe G im traditionellem Sinne.[22] Es ist ein Eilenberg-MacLane-Raum[23] vom Type K(G,1), d.h. nur wenige Homotopie-Typen treten in dieser Gestalt auf.

---

[21] Die einzige Hom-Menge ist gleich G, die Morphismen-Komposition ist gerade die Gruppenoperation.

[22] vgl. Husemoller: Fibre bundles. Seien eine G topologische Gruppe und

$$k_G : \mathrm{Top}^0 \to \mathrm{Ens},$$

der kontravariante Funktor, der jedem topologischen Raum X∈Top die Menge $k_G(B)$ der Isomorphie-Klassen (nummerierbarer) prinzipaler G-Bündel zuordnet. Ein (nummerierbares) G-Bündel $\pi:E \to B$ heißt universell, wenn der funktorielle Morphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Homotopy}}(? , B) \to k_G(?) , X \xrightarrow{f} B \mapsto f^*(E),$$

der jeder Homotopie-Klassen von stetigen Abbildungen $f:X \to B$ die Isomorphieklasse des nach X verpflanzte Bündels

$$f^*(\pi): f^*(E) \to X$$

zuordnet, ein funktorieller Isomorphismus ist. Der Raum B heißt dann klassifizierender Raum der Gruppe G. Für die Details, siehe Husemoller, Fibre Bundels, Part I, Chap. 4., Sectionen 10 und 11.

[23] Ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ K(G,n) ist ein linear zusammenhängender punktierter Raum (X, x) mit $\pi_k(X,x) = 0$ für jedes $k \neq n$ und $\pi_n(X,x) = G$. vg. Spanier, Algebraic topology, 8.1.

Für n > 1 muß G abelsch sein. In diesem Fall läßt sich K(G, n) als CW-Komplex realisieren. Jeder CW-Komplex besitzt eine Postnikov-Turn, der homotopie-äquivalent zu einem iterierten Faserbündel mit Eilenberg-Maclane-Räumen als Fasern.

2.1.1.6 Die Homotopie-Gruppen einer kleinen Kategorie

Seien C eine kleine Kategorie und X∈C ein Objekt von C. Dann benutzen wir X auch als Bezeichnung für die zum 0-Simplex X gehörige 0-Zelle des klassifizierenden Raumes BC. Die Gruppen

$$\pi_1(C, X) := \pi_1(BC, X)$$

sind somit wohldefiniert und heißen Homotopie-Gruppen der Kategorie C bezüglich des Basispunkts X.

Bemerkungen

(i) Natürlich ist

$$\pi_0(C, X)$$

keine Gruppe, sondern nur eine punktierte Menge, nämlich die Menge der Komponenten $\pi_0(C)$ von BC , punktiert durch die Komponente des Punktes X.

(ii) Die Zusammenhangskomponenten von BC sind übrigens in eineindeutiger Korrespondenz zu den Zusammenhangskomponenten von C.

(iii) Wir werden sehen, $\pi_1(C, X)$ und die Homologie-Gruppen von BC können in rein algebraischer Weise definiert werden ohne Verwendung von Räumen und diesen nahestehenden Techniken wie die semi-simpliziale Homotopie-Theorie oder die simplizialen Komplexe und deren Unterteilunden.

(iv) Die Existenz ähnlicher Beschreibungen für die höheren Homotopie-Gruppen scheint unwahrscheinlich zu sein, da bisher niemand eine algebraische Definition der Homotopie-Gruppen eines Simplizialkomplexes gegeben hat.

2.1.2 Überlagerungen des klassifizierenden Raums BC und die fundamentale Gruppe

2.1.2.1 Der morphismen-invertierende Funktor zu einer Überlagerung von BC

Seien C eine kleine Kategorie und

$$E$$

eine (unverzweigte) Überlagerung[24] von BC. Für jedes Objekt X von C bezeichne

$$E(X)$$

die Faser von E über X, wobei man X als 0-Zelle von BC betrachtet.

Ist

$$u: X \to X'$$

ein Morphismus von C, so definiert u einen Weg von X nach X' in BC (entlang der durch u definierten Kante), und damit eine Bijektion[25]

$$E(u): E(X) \to E(X').$$

Bemerkung

Es ist leicht zu sehen, daß

---

[24] Siehen den Anhang 'Topologische Räume'.

[25] Ist $P \in E(X)$, so ist das Bild von P bei E(u) gerade der Endpunkt der Anhebung der "Kurve" u mit dem Anfangspunkt P. Ersetzt man die "Kurve" u durch deren Inverses, d.h. durch die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve u, so erhält man in analoger Weise eine Abbildung $E(X') \longrightarrow E(X)$, die gerade invers ist zu E(u). Insbesondere ist E(u) bijektiv.

$$E(fg) = E(f)°E(g)$$

gilt, d.h. wir erhalten auf die hier beschriebene Weise einen Funktor

$$E: C \to Ens,\ X \mapsto E(X),$$

der morphismen-invertierend ist, d.h. jeder Morphismus wird in einen Isomorphismus überführt.[26]

2.1.2.2 Die Überlagerung zu einem morphismen-invertierenden Funktor

Seien C eine kleine Kategorie und

$$F: C \to Ens$$

ein kovarianter Funktor. Wir bezeichnen mit

$$F\backslash C$$

die Kategorie, deren Objekte die Paare

$$(X, x) \text{ mit } X \in C \text{ und } x \in F(X)$$

und deren Morphismen

$$(X,x) \to (X',x')$$

gerade die Morphismen

$$u: X \to X' \in Mor\ C$$

sind mit $F(u)x = x'$, d.h.

$$Hom((X,x), (X',x')) := \{u: X \to X' \in Mor\ C \mid F(u)x = x'\}.$$

Bemerkungen

(i) Der Vergiß-Funktor

$$F\backslash C \to C,\ (X,x) \mapsto X,$$

induziert eine Abbildung der klassifizierenden Räume

$$B(F\backslash C) \to B(C),$$

mit der Faser F(X) über der 0-Zelle X für jedes Objekt $X \in C$.

(ii) Ist der Funktor F morphismen-invertierend, so ist leicht zu sehen, daß die Abbildung

$$B(F\backslash C) \to B(C),$$

lokal trivial ist (man benutze [Gabriel-Zisman, App. I, 3.2]), d.h. B(F\C) ist ein Überlagerungsraum von BC.

(ii) Es ist klar, daß die eben beschriebenen Konstruktionen von 2.1.2.1 und 2.1.2.2 invers zueinander sind. Wir erhalten so eine Äquivalenz von Kategorien[27]

$$(\text{Überlagerungen von } BC) \xrightarrow{\cong} (\text{morphismen-invertierende } F: C \to Ens),$$

wobei die Kategorie rechts die volle Teilkategorie der Kategorie

$$Funct(C, Ens)$$

der kovarianten Funktoren $C \to Ens$ sein soll, die aus den morphismen-invertierenden Funktoren bestehen soll.

2.1.2.3 Das Gruppoid G zur Kategorie C

Sei C eine kleine Kategorie und

$$G := C[\ (Mor\ C)^{-1}\ ]$$

---

[26] Die durch einen Morphismus gegebene Kante kann als Weg auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Dieser Weg in umgekehrter Richtung definiert gerade die Umkehrung des Bildes des gegebenen Morphismus.

[27] siehe den Anhang ‘Kategorien

das Gruppoid[28], welches aus C entsteht durch formales Adjungieren der Inversen aller Morphismen von C (vgl [Gabriel-Zisman, I, 1.1]). Der natürliche Funktor

$$C \to G$$

induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Funct}(G, \text{Ens}) \xrightarrow{\cong} (\text{morphismen-invertierende } F: C \to \text{Ens})$$

(vgl. [Gabriel-Zisman, I, 1.2]).

2.1.2.4 Proposition 1: algebraische Beschreibung von $\pi_1(C, X)$

Sei C eine kleine Kategorie. Die Kategorie der Überlagerungsräume von

$$BC$$

ist äquivalent zur Kategorie der morphismen-invertierenden Funktoren

$$F: C \to \text{Ens},$$

oder was dasselben bedeutet, zur Kategorie der Funktoren

$$G \to \text{Ens},$$

wenn $G = C[\ (\text{Mor } C)^{-1}\ ]$ das Gruppoid bezeichnet, welches man aus C durch invertieren aller Mophismen erhält.

Die fundamentale Gruppe $\pi_1(C, X)$ ist kanonisch isomorph zur Gruppe der Automorphismen des Objekts X von C, betrachtet als Objekt von G.

Beweis. Der erste Teil der Aussage folgt aus 2.1.2.2 und 2.1.2.3. Sei X ein Objekt von C und bezeichne

$$G_X$$

die Gruppe der Automorphismen von X betrachtet als Objekt von G. Ist C zusammenhängend, so ist der Inklusions-Funktor[29]

$$G_X \to G$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Damit hat man eine Äquivalenz

$$\text{Funct}(G, \text{Ens}) \xrightarrow{\cong} \text{Funct}(G_X, \text{Ens}) = (G_X\text{-Sets}).$$

Indem wir diese Äquivalenz mit den obigen Äquivalenzen zusammensetzen, erhalten wir eine Äquivalenz der Kategorie der Überlagerungsräume von

$$BC$$

---

[28] Gruppoid = Kategorie, deren sämtliche Morphismen Isomorphismen sind.
Die Konstruktion verallgemeinert den Begriff des Quotientenrings (und ist komplizierter als letzterer: es werden zum Beispiel auch Quotientenring nicht-kommutativer Ringe erfaßt). Sei

$$R$$

ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge. Wir betrachten R als Kategorie, deren einziges Objekt R ist und deren Morphismen gerade die Elemente von R (die man sich mit den zugehörigen Multiplikationsabbildungen $R \longrightarrow R$ identifiziert denken kann). Die Isomorphismen dieser Kategorie sind gerade die Einheiten. Die natürliche Abbildung

$$R \longrightarrow R_S$$

bildet jeden Morphismus aus S in einen Isomorphismus ab und ist universell bezüglich dieser Eigenschaft.

[29] Links steht eine Kategorie, deren einziges Objekt X ist, und deren Morphismen die Automorphismen von X in G sind.

mit der Kategorie der G_X-Mengen, die durch die Zuordnungsvorschrift

$$E \longrightarrow BC \mapsto E(X) := \text{Faser über } X \in BC$$

gegeben ist. Nach der Theorie der Überlagerungsräume[30] ergibt sich daraus, daß es einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(C, X) \xrightarrow{\cong} G_X$$

gibt. Dieselbe Schlußfolgerung ist auch richtig, wenn C nicht zusammenhängend ist, denn beide Gruppen hängen nur von der Zusammenhangskomponente von C ab, die X enthält.
QED.

Bemerkung
Es folgt insbesondere, ein System L von lokalen Koeffizienten auf BC kann identifiziert werden mit dem morphismen-invertierenden Funktor

$$C \to Ab, X \mapsto L(X).$$

2.1.3 Die Homologie von BC

2.1.3.1 Vorbemerkung

Es ist wohlbekannt, daß die Homologie und die Kohomologie des klassifizierenden Raumes einer diskreten Gruppe übereinstimmen mit der Homologie und Kohomologie der Gruppe im Sinne der homologischen Algebra. Wir beschreiben jetzt die Verallgemeinerung dieser Tatsache auf den Fall einer beliebigen kleinen Kategorie.[31]

---

[30] Zum Beweis der nachstehenden Isomorphie reicht es, darauf hinzuweisen (siehe Anhang 'Topologische Räume'), daß die Kategorie der Überlagerungsräume von BC äquivalent ist zur Kategorie

$$\pi_1(C, X)\text{-Sets}$$

der Mengen mit $\pi_1(C, X)$-Operation, denn für jede Gruppe G ist G ein punktiertes Objekt von

$$G\text{-Sets}$$

mit dem neutralen Element als Basispunkt und der folgenden Eigenschaft.
Für jede punktierte G-Menge M und gibt es genau einen Morphismus $G \longrightarrow M$ punktierter G-Mengen (nämlich die Abbildung $g \mapsto g \bullet m$, wenn m den Basispunkt von M bezeichnet). Mit anderen Worten, die punktierte Menge G ist ein initiales Objekt der zugehörigen Kategorie der punktierten G-Mengen. Je zwei solche Objekte sind aber isomorph (als punktierte Mengen und damit als Gruppen).

[31] Zur Definition der Homologie bzw. Kohomologie einer Gruppe G mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A mit G-Operation betrachtet man deren Gruppenring

$$\mathbb{Z}[G]$$

und dessen mit A tensorierte Tensorpotenzen

$$C_n(G, A) := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G \times ... \times G] \text{ (n+1 mal)}$$

Die i-te Seiten-Abbildung

$$\partial^i : C_n(G, A) \longrightarrow C_{n-1}(G, A), (g_0, ..., g_n) \mapsto (g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n)$$

ist auf den freien Erzeugern aus G^{n+1} durch das Weglassen der i-ten Koordinate definiert. Die alternierende Summe der Seiten-Abbildungen definiert einen Randoperator und versieht die $C_n(G, A)$ mit der Struktur eines Komplexes

$$C_*(G, A),$$

dessen n-te Homologie mit

$$H_n(G, A) := H_n(C_*(G, A))$$

2.1.3.2 Die Homologie-Gruppen von C

Seien C eine kleine Kategorie und

$$A: C \to Ab$$

ein kovarianter Funktor mit Werten in der Kategorie Ab der abelschen Gruppen. Bezeichne

$$H_p(C, A)$$

die p-te Homologie der simplizialen abelschen Gruppe[32]

$$\Delta \to Ab,\ [p] \mapsto C_p(C, A) := \bigoplus_{X_0 \to \ldots \to X_p} A(X_0),$$

der Ketten des Nervs NC mit Koeffizienten in A.

Bemerkungen

(i) Unter der Homologie verstehen wir hier die Homologie des zugehörigen normalisierten Kettenkomplexes[33].

---

bezeichnet wird und n-te Homologie von G mit Koeffizienten aus A heißt. Durch Anwenden des Hom-Funktors $\mathrm{Hom}_{Ab}(?\ , A)$ auf den Komplex $C_*(G, \mathbb{Z})$ erhält man den Komplex

$$C^*(G, A) := \mathrm{Hom}_{Ab}(C_*(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

dessen Kohomologie

$$H^n(G, A) := H^n(C^*(G,A))$$

Kohomologie der Gruppe G mit Koeffizienten in A heißt. Eine Einführung in die Gruppen-Homologie und -Kohomologie findet man zum Beispiel in

Cassels & Fröhlich: Algebraic number theory (Kapitel IV)

Alternativ kann man die Gruppen-Homologie und Gruppen-Kohomologie auch als abgeleitete Funktoren des Tor- bzw. des Hom-Funktors definieren.

[32] Eine simpliziale abelsche Gruppe ist ein kontravarianter Funktor

$$F.\Delta^{op} \to Ab.$$

Zur Definition der p-ten Homologie betrachtet man den Komplex

$$\ldots \to F([p+1]) \to F([p]) \xrightarrow{\partial} F([p-1]) \to \ldots$$

dessen p-ter Rand-Homomorphismus gerade die alternierende Summe

$$\partial = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i F(\partial_i)$$

ist, wobei $\partial_i: [p-1] \to [p]$ die i-te Seiten-Abbildung ist, d.h. die streng monotone Abbildung, deren Bild die Zahl i nicht enthält,

$$i \notin \mathrm{Im}\ \partial_i .$$

Die p-te Homologiegruppe $H^p(F)$ von F ist definiert als die p-te Homologie dieses Komplexes.

[33] (vgl. Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra, 1994) Ist

$$A: \Delta^{op} \to A$$

eine simpliziale abelsche Gruppe so ist das n-te Objekt des normalisiertes Kettenkomplexes von A gleich

$$\cap_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ker}(\partial_i: A_n \to A_{n-1})$$

(ii) Es besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$H_p(C, A) = \varinjlim{}^{C}_{p} A .$$

Dabei bezeichne $\varinjlim{}^{C}_{p}$ den p-ten links-abgeleiteten Funktor des rechtsexakten Funktors[34]

$$\varinjlim : \text{Funct}\,(C^0, \text{Ab}) \to \text{Ab}.$$

Das beweist man[35], indem man zeigt, die Funktoren

Dessen n-tes Differential ist definiert als $d = (-1)^n \partial_n$. Nach Konstruktion ist dies ein Teilkomplex des unnormalisierten Kettenkomplexes. Die Homologie dieses Komplexes ist dieselbe wie die des unnormalisierten Kettenkomplexes (im Fall von simplizialen Objekten mit Werten in beliebigen abelschen Kategorien, siehe Weibel, Theorem 8.3.8).

[34] Sei $A: C^0 \to \text{Ab}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist $\varinjlim$ das Faktorobjekt von

$$\oplus_{X \in C} A(X),$$

welches entsteht, indem man Elemente $u' \in A(X')$ und $u'' \in A(X'')$ (aufgefaßt als Elemente der direkten Summe) identifiziert, wenn es Morphismen $f': X \to X'$ und $f'': X \to X''$ gibt mit

$$A(f')x' = A(f'')x'',$$

d.h. man faktorisiert nach der von den Differenzen $x' - x''$ erzeugten Untergruppe.

[35] Nach Definition ist $H_0(C, A)$ die Homologie des Komplexes $C_*(C,A)$ an der 0-the Stelle. Da der Komplex an der 0-ten Stelle aufhört ist jede 0-Kette ein Zyklus. Es ist also

$$H_0(C, A) = \oplus_{X \in C} A(X) / \text{0-Ränder}.$$

Die Untergruppe der 0-Ränder wird erzeugt von den Differenzen

$$\alpha - \beta$$

mit $\alpha \in A(X)$, $\beta \in B(X')$ und $A(u)\alpha = \beta$ für einen Morphismus $u: X \longrightarrow X'$ in C. Dabei fassen wir A(X) und A(X') als Untergruppen der direkten Summe der Werte von A über alle Objekte von C auf. Diese Beschreibung zeigt, daß

$$H_0(C, A) = \varinjlim A = \varinjlim_{X \in C} A(X)$$

gerade der direkte Limes des Funktors A ist.

Man beachte, beim Übergang zum normalisierten Komplex faktorisiert man nach der von allen α erzeugten Untergruppe, für welche es einen Morphismus u gibt mit $A(u)\alpha = 0$.

Als direkter Limes ist $H_0(C, A)$ als Funktor in A rechtsexakt. Für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

von additiven Funktoren $C \longrightarrow \text{Ab}$ und jedes Objekt $X \in C$ sind die Sequenzen

$$0 \longrightarrow A'(X) \longrightarrow A(X) \longrightarrow A''(X) \longrightarrow 0$$

exakt in Ab. Wir bilden direkte Summen über alle Objekte von C und erhalten exakte Sequenzen von Komplexen abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow C_*(C, A') \longrightarrow C_*(C,A) \longrightarrow C_*(C, A'') \longrightarrow 0.$$

Die zugehörige lange Homologie-Sequenz ist gerade die exakte Sequenz, durch welche die $H_*(C, A)$ zu einem exakten ∂-Funktor werden. Wir haben noch zu zeigen, dieser Funktor ist universell. Dazu reicht es zu zeigen, für jeden Funktor A gibt es einen Epimorphismus

$$P \longrightarrow A$$

von Funktoren $C \longrightarrow \text{Ab}$ mit $H_p(C, P) = 0$. Dazu benötigen wir die Begriffe

Abbildungskegel und Abbildungszyklinder eines Morphismus von Komplexen.
Seien K* und K'* Komplexe abelscher Gruppen mit den Randoperatoren d bzw. d' und

$$f: K^* \longrightarrow K'^*$$

ein Komplex-Morphismus. Wir setzen

$$Cyl(f) := K^* \oplus K^*[-1] \oplus K'^*$$
$$Con(f) := K^*[-1] \oplus K'$$

Dann sind Cyl(f) und Con(f) Komplexe abelscher Gruppen mit den Randoperatoren

$$Cyl(f) \longrightarrow Cyl(f)[-1],\ (x, y, z') \mapsto (dx+y, -dy, d'z'-f(y)),$$

$$Con(f) \longrightarrow Con(f)[-1],\ (x,y') \mapsto (-dx, d'y' - f(x)).$$

Mit diesen Randoperatoren heißt Cyl(f) Abbildungszylinder von f und Con(f) Abbildungskegel von f.

Bemerkungen

(i) Die folgenden Sequenzen von Komplex-Morphismen sind exakt.

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow Cyl(f) \longrightarrow Con(f) \longrightarrow 0$$
$$x \mapsto (x,0,0),\ (x,y,z') \mapsto (y,z)$$
$$0 \longrightarrow K'^* \longrightarrow Con(f) \longrightarrow K^*[-1] \longrightarrow 0$$
$$x' \mapsto (0,x),\ (x,y') \mapsto x$$

(i) Der Abbildungszylinder ist homotopie-äquivalent z K'*. Genauer, die beiden folgenden Komplex-Morphismen sind homtopie-invers.

$$K'^* \longrightarrow Cyl(f),\ x' \mapsto (0,0,x')$$
$$Cyl(f) \longrightarrow K'^*,\ (x,y,z') \mapsto f(x) + z'.$$

(siehe Bourbaki, N.: Algèbre, Chap. X, Algèbre homologique, §2.6, Prop. 7)

Beweis der universalität der ∂-Funktoren $H_*(C, A)$.

Wir betrachten den Nullfunktor 0: C $\longrightarrow$ Ab und den zugehörigen Komplex-Morphismus

$$\varphi: C_*(C,A) \longrightarrow C_*(C, 0).$$

Aus den beiden exakten Sequenzen zum Abbildungszylinder und Abbildungskegel erhalten wir einen surjektiven Morphismus von Komplexen abelscher Gruppen

$$Cyl(\varphi)[+1] \twoheadrightarrow Con(\varphi)[+1] \twoheadrightarrow C_*(C,A)$$

Weil das Bild von φ der Nullkomplex ist, hat mit $K := C_*(C,A)$ dieser Morphismus die Gestalt

$$K[+1] \oplus K \twoheadrightarrow K \twoheadrightarrow K.$$

Der Komplex links ist homotopie-äquivalent zum Null-Komplex, hat also triviale Homologie (d.h. der Komplex ist eine exakte Sequenz). Wir lassen in diesem Komplex die Objekte des Grades -1 weg und erhalten immer noch einen surjektiven Komplex-Morphismus

$$L := (K[+1] \oplus K)' \twoheadrightarrow K$$

(weil K im Grad -1 trivial ist). Der Komplex links ist dann immer noch exakt in allen positiven Graden. Wir definieren einen Funktor

$$P : C \longrightarrow Ab,$$

dessen Wert im Objekt $X \in C$ gerade die direkte Summe über alle direken Summanden des Grades 0 von L ist, die zu den Morphismen mit der Quelle X bzw. zum Objekt selbst X gehören. Der Komplex-Morphismus L $\longrightarrow$ K im Grad 0 liefert durch Einschränken einen surjektiven funktoriellen Morphismus

$$\text{Funct}\,(C^0, Ab) \to Ab\ ,\ A \mapsto H_p(C, A)$$

bilden einen exakten ∂-Funktor[36], der im Grad 0 mit $\varinjlim$ übereinstimmt und koaffaceable ist in den positiven Graden (vgl. [Gabriel-Zisman, App. II, 3.3]).

(iii) Bezeichne

$$H_*(BC, L)$$

die singuläre Homologie des klassifizierenden Raumes BC mit Koeffizienten in einem lokalen System L. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H_p(BC, L) = H_p(C, L),$$

wobei wir rechts das lokale System L mit einem morphismen-invertierenden Funktor wie in 2.1.2.3 identifizieren.[37]
Der Beweis erfolgt[38], indem man den CW-Komplex BC mit Hilfe der Skelett-Konstruktion filtert und die zugehörige Spektral-Sequenz[39] betrachtet. Man hat

---

$$P \longrightarrow A.$$

Aus der Definition von P und L ergibt sich,

$$C_*(C, P) = L.$$

Insbesondere ist für $n > 0$

$$H_n(C, P) = H_n(L) = 0.$$

Für einen direkten Beweis der Universalität, siehe auch Weibel, Exercise 2.4.4.

[36] siehe den Anhang 'Abgeleitete Funktoren'

[37] Ein lokales System auf einem topologischen Raum X ist definiert (Spanier) als kovarianter Funktor auf dem fundamentalen Gruppoid P(X) des Raumes X mit Werten in irgendeiner Kategorie, sagen wir Ab,

$$L: P(X) \longrightarrow Ab.$$

Die Objekte von P(X) sind die Punkte von X. Die Morphismen f: $x \longrightarrow y$ von P(X) sind gerade die Homotopieklassen der Wege mit dem Anfang x und dem Ende y. Die Morphismen-Komposition wird kommt von der Hintereinanderausführung der Wege.

Nun sind die Objekte der Kategorie C insbesondere Punkte von X = BC, und die Morphismen von C sind Kanten von BC, d.h. speziellen Wege. Durch Einschränken auf C erhalten wir also einen Funktor

$$L: C \longrightarrow Ab,$$

den wir ebenfalls mit L bezeichnen wollen. Weil alle Morphismen von P(X) Isomorphismen sind, ist dies ein morphismen-invertierender Funktor.

[38]

Die Spektralsequenz der Skelett-Filtration.
Die Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \Rightarrow H^n(K).$$

eines filtrierten Komplexes bekommt in homologischer Terminologie die Gestalt

$$E^1_{pq} = H_{p+q}(F_p/F_{p-1}) => H_n(K).$$

In unserem Fall ist

$K := C_*(NC, L)$ der von den Simplexen der Triangulierung NC erzeugte Komplex.

Sei $NC^{(p)}$ die simpliziale Teilmenge von NC, welche aus den n-Simplexen

$$E^1_{pq} = 0 \text{ für } q \neq 0$$

und

$$E^1_{*0} = \text{normalisierter Kettenkomplex zu } C_*(C, L)$$

(vgl. [Segal 1, 5.1]). Die Spektral-Sequenz degeneriert und liefert den behaupteten Isomorphismus.

2.1.3.3 Kohomologie

Seien C eine kleine Kategorie und L ein lokales System auf dem klassifizierenden Raum BC. Analog zur Homologie hat man einen natürliche Isomorphismus

$$H^p(BC, L) = \limp_{\leftarrow C} L,$$

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_n$$

besteht, in welchen höchsten p Morphismen vorkommen, die vom identischen Morphismus verschieden sind. Weiter sei

$$F_p := C(NC^{(p)}, L)$$

der zugehörige Teilkomplex von K. Der Faktorkomplex

$$F_p/F_{p-1}$$

wird dann als graduierte abelsche Gruppe erzeugt von allen nicht-entarteten p-Simplexen. Alle Randoperatoren sind trivial, weil es keine Simplexe mit einer von p verschiedenen Dimension gibt.

Damit ist

$E^1_{pq} = H_{p+q}(F_p/F_{p-1}) = 0$ für $q \neq 0$.

$E^1_{p0} = H_p(F_p/F_{p-1}) =$ die von den nicht-entarteten p-Simplexen erzeugte Untergruppe von $C_p(C,L)$
$= NC_*(C,L)_p$

Die Differentiale

$$E^1_{p0} \longrightarrow E^1_{p-1,0}$$

sind gerade die Einschränkungen der Differentiale von $C_*(C,L)$.

Es folgt

$$E^2_{p0} = H_p(C_*(C,L).) = H_p(C, L).$$

Die Differentiale von E^2 sind sämtlich Null (weil nur eine Zeile des Doppelkomplexes von Null vershiedene Objekte besitzt und die Differentiale den Bigrad (-2, +1) haben)). Es folgt

$$H_p(BC, L) = F_p H_p(BC,L)/F_{p-1} H^*(BC,L) = E^\infty_{p0} = E^2_{p0} = H_p(C, L).$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, weil alle anderen graduierten Bestandteile zur Filtration F auf

$$H_p(BC,L)$$

gleich Null sind.

[39] siehe die Anhänge

wobei $\underset{\leftarrow C}{\lim^p}$ den p-ten abgeleiteten Funktor des linksexakten Funktors

$$\underset{\leftarrow}{\lim} : \text{Funct}\,(C^0, \text{Ab}) \to \text{Ab}$$

bezeichne.

2.1.4 Eigenschaften des klassifizierenden Raumes

2.1.4.1 Der klassifizierende Raum B als Funktor

Von jetzt an benutzen wir die Symbole

$$C,\ C'\ \text{usw.}$$

zur Bezeichnung kleiner Kategorien. Ist

$$f: C \to C'$$

ein Funktor, so induziert dieser eine zelluläre Abbildung[40]

$$Bf: BC \to BC'.$$

Wir erhalten so einen treuen Funktor

$$B: (\text{kleine Kategorien}) \to (\text{CW-Komplexe und zelluläre Abbildungen})$$

von der Kategorie der kleinen Kategorien in die Kategorie der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen.[41]

Bemerkungen

(i) Dieser Funktor ist nicht völlig treu.

(ii) Zum Beispiel gibt es einen kanonischen Homöomorphismus[42]

$$BC = BC^0,$$

wobei C^0 die duale Kategorie bezeichnet. Dieser Homöomorphismus kommt nicht von einem Funktor $C \to C^0$ ausgenommen in sehr speziellen Fällen, zum Beispiel wenn C eine Gruppe ist.[43]

(iii) Auf Grund der Verträglichkeit der geometrischen Realisierung mit Produkten (vgl. Milnor 1) weiß man, die natürliche Abbildung

$$B(C \times C') \to BC \times BC'$$

ist ein Homöomorphismus, wenn BC oder BC' endliche Komplexe sind oder wenn man das Produkt rechts mit der kompakt erzeugten Topologie[44] versieht. Wie in [Segal 1][45] hingewiesen ergibt sich daraus die folgende Proposition.

---

[40] d.h. eine stetige Abbildung, die mit den gegebenen Triangulierungen auf BC und BC' verträglich ist (d.h. Zellen in Zellen abbildet).

[41] Der Funktor ist true, weil f: $C \longrightarrow C'$ aus Bf: $BC \longrightarrow BC'$ wiedergewinnen kann durch Einschränken von Bf auf die Ecken und Kanten .von BC.

[42] Der Homöomorphismus ist auf den Ecken von BC die identische Abbildung und auf jedem Simplex die lineare Fortsetzung der Abbildung auf den Ecken. Insbesondere wird jeder Weg von A nach B in einen Weg von A nach B abgebildet.

[43] Falls es einen solchen Funktor F: $C \longrightarrow C^{op}$ gibt, so muß er auf den Ecken die identische Abbildung sein und und BF jeden Weg von A nach B in einen Weg von A nach B abbilden. Für einen kontravarianten Funktor F bildet aber BF einen Weg von A nach B stets in einen Weg von B nach A ab. Dies ist nur im Fall A = B auch ein Weg von A nach B. Sobald die Kategorie C einen Morphismus f: $A \longrightarrow B$ besitzt mit $A \neq B$, kommt der Homöomorphismus $BC = BC^{op}$ nicht von einem Funktor. Ist C eine Gruppe, so ist durch

$$F: \text{Mor}(C) \longrightarrow \text{Mor}(C^{op}),\ g \mapsto g^{-1},$$

ein Funktor der gesuchten Art definiert.

2.1.4.2 Proposition 2: natürliche Transformationen und Homotopie

Jede natürliche Transformation θ: f → g von Funktoren f,g:C→C' induziert eine Homotopie BC×I → BC' von Bf und Bg.

Beweis. Das Tripel (f,g,θ) kann als Funktor C×**1**→C' angesehen werden[46], wobei **1** die in natürlicher Weise geordnete Menge {0, 1} bezeichne und B**1** das Einheitsintervall[47] ist.

---

[44] Die Topologie des Raumes ist die feinste Topologie, bei der die Einbettungen der endlichen Teilkomplexe in den Gesamtraum stetig sind (vgl. Spanier: Algebraic topology, Introduction §2, section 5).

[45] In der Arbeit von Segal wird nur weiterverwiesen auf

Gabriel & Zisman, Chapter III, §3.1, Theorem p. 47

und

Kelley: General Topology, p. 230.

[46] Der (Bi-)Funktor

$$F: C \times I \longrightarrow C'$$

ist auf den Objekten wie folgt definiert.

$F(X, 0) := f(X)$

$F(X, 1) := g(X)$.

Bezeichne

$\xi: 0 \longrightarrow 1$

den einzigen Morphismus von I, welcher kein identischer Morphismus ist. Dann ist der Funktor F auf den Morphismen wie folgt definiert.

$F(\alpha, id_0) = f(\alpha)$

$F(\alpha, id_1) = g(\alpha)$

$F(\alpha, \xi) := \eta$

Dabei sei η wie folgt definiert. Ist α: a ⟶ b ein Morpismus in C mit der Quelle a und dem Ziel b, so ergibt sich auf Grund der natürlichen Transformation θ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f(a) & \xrightarrow{f(\alpha)} & f(b) \\ {\scriptstyle\theta_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_b} \\ g(a) & \xrightarrow{g(\alpha)} & g(b) \end{array}$$

Der Morphismus η: $F(a,0) = f(a) \longrightarrow f(b) = F(b,1)$ ist dann definiert als die Zusammensetzung

$$\eta = \theta_b \circ f(\alpha) = g(\alpha) \circ \theta_a$$

Nach Definiton sind die Einschränkungen von F auf C×{o} und C×{1} gerade

$$F|C\times\{0\} = f \text{ bzw. } F|C\times\{1\} = g.$$

Der Funktor F: C×I ⟶ C' induziert auf den klassifizierenden Räumen eine stetige Abbildung

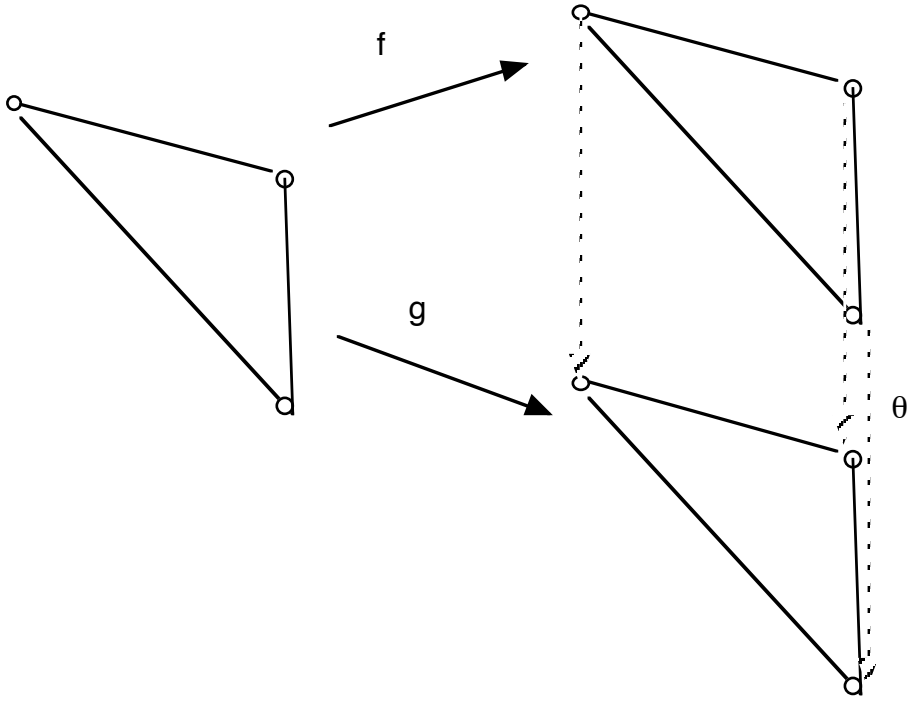
$$BF: B(C\times I) \longrightarrow B(C').$$

Nach dem Satz von Eilenberg-Silber ist

$$B(C\times I) = B(C)\times B(I) = B(C) \times [0, 1]$$

Die Einschränkung von BF auf B(C)×{0} ist gerade Bf, die Einschränkung von BF auf B(C)×{1} gerade Bg.

QED.



2.1.4.3 Homotopie-Äquivalenzen

Ein Funktor f. C → C' zwischen den kleinen Kategorien C und C' heißt Homotopie-Äquivalenz, wenn er eine Homotopie-Äquivalenz Bf: BC→BC' der klassifizierenden Räume induziert.[48] Eine kleine Kategorie C heißt kontrahierbar, wenn der klassifizierende Raum BC kontrahierbar ist.[49]

2.1.4.4. Folgerung 1: Existenz adjungierter Funktoren und Homotopie-Äquivalenz

Besitzt der Funktor f: C→C' zwischen den kleinen Kategorien einen links- oder rechtsadjungierten Funktor, so ist f eine Homotopie-Äquivalenz.

Beweis. Ist f': C'→C zum Beispiel linksadjungiert zu f, so gibt es natürliche Transfomationen[50]

Also ist BF eine Homotopie von Bf nach Bg.

[47] I besteht aus den Objekten 0 und 1 und genau einem Morphismus ξ: $0 \longrightarrow 1$, der kein identischer Morphismus ist. Die einzigen nicht-entarteten Simplexe von NI sind 0, 1 und ξ, d.h. eine Kante ξ und deren Endpunkte 0 und 1. Die geometrische Realisierung ist also eine Strecke, die man mit dem Einheitsintervall identifizieren kann.

[48] Eine Homotopie-Äquivalenz f: $X \longrightarrow X'$ der topologischen Räume X und X' ist eine stetige Abbildung, für welche es eine stetige Abbildung f': $X' \longrightarrow X$ in umgekehrter Richtung gibt, mit der Eigenschaft, daß die beiden Zusammensetzungen

$$f \circ f': X' \longrightarrow X' \text{ und } f' \circ f: X \longrightarrow X$$

homotop sind zur identischen Abbildung.

[49] d.h. wenn die identische Abbildung des Raums homotop ist zu einer konstanten Abbildung.

[50] Nach Voraussetung gilt

$$\mathrm{Hom}(f'x, y) = \mathrm{Hom}(x', f(y)).$$

$$f'f \to Id \text{ und } Id \to ff'.$$

Nach 2.1.4.2 sind Bf und Bf' Homotopie-invers, also Bf eine Homotopie-Äquivalenz.
QED.

2.1.4.5 Folgerung 2:Existenz initialer bzw. terminaler Objekte und Kontrahierbarkeit

Jede Kategorie mit initialen oder terminalen Objekt ist kontrahierbar
Beweis. In dieser Situation besitzt der Funktor

$$C \to pt$$

von der gegebenen Kategorie C mit Werten in der einpunktigen Kategorie[51] einen adjungierten Funktor.[52]
QED.

Für y = f'(x) entspricht der identische Morphismus links einem Morphismus $x' \longrightarrow ff'x'$ rechts, d.hj. einer natürlichen Transformation $Id \longrightarrow ff'$. Analog erhält man für x' = f(y) einen Morphismus $f'f(y) \longrightarrow y$ und demit eine natürliche Transformation $f'f \longrightarrow Id$.

[51] d.h. die Kategorie besitzt nur ein Objekt und nur einen Morphismus.

[52] Das einzige Objekt von pt sei p (und der einzige Morphismus id_p). Besitze C ein terminales Objekt e. Wir bezeichnen den Funktor $C \longrightarrow pt$ mit F,

$$F: C \longrightarrow pt.$$

Er bildet alle Objekt von C in p ab und alle Morphismen von C in id_p. Weiter sei G der Funktor

$$G: pt \longrightarrow C,\ p \mapsto e,\ id_p \mapsto id_e.$$

der Funktor, welcher p ins terminale Objekt e abbildet (und id_p nach id_e).
Für jedes Objekt x von C besteht die Hom-Menge

$$Hom(F(x), p)$$

aus genau einer natürlichen Transformation (weil pt nur einen Morphismus hat). Weiter besteht die Hom-Menge

$$Hom(x, G(p))$$

aus genau einen Element (weil G(p) terminal ist). Deshalb gibt es für jedes Objekt x von C genau eine Bijektion

$$Hom(F(x), p) \overset{\cong}{\longrightarrow} Hom(x, G(p))$$

Diese Bijektionen setzen sich zusammen zu einem Isomorphismus von Bifunktoren. F besitzt also einen rechtsadjungierten Funktor G.
Falls C ein initiales Objekt besitzt, betrachte man den Funktor

$$H: pt \longrightarrow C,\ p \mapsto i,$$

der p ins initiale Object i von C abbildet. Wie oben erhält man einen funktoriellen Morphismus

$$Hom(p, F(x)) \overset{\cong}{\longrightarrow} Hom\ (G(p), x)$$

da beide Hom-Mengen aus genau einem Element bestehen. Für die rechte Hom-Menge folgt das aus der Tatsache, daß pt nur einen Morphismus besitzt, für die linke, weil G(p) ein initiales Objekt ist.

2.1.4.6 Propostion 3: Die Homotopie-Gruppe eines direkten Limes

Sei I eine kleine Kategorie, die filtrierend[53] ist und sei

$$I \to (\text{kleine Kategorien}),\ i \mapsto C_i\ ,$$

ein Funktor. Wir setzen[54]

$$C := \varinjlim_{i \in I} C_i\ .$$

Weiter sei für jedes $i \in I$ ein Objekt

$$X_i \in C_i$$

gegeben mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus $i \to j$ in I der zugehörige Funktor

$$C_i \to C_j$$

das Objekt X_i in das Objekt X_j überführt. Dann bilden die Homotopie-Gruppen

$$\pi_n(C_i\ ,\ X_i)$$

für jedes n ein induktives System über I, und es gilt

$$\varinjlim_{i \in I} \pi_n(C_i\ ,\ X_i) = \pi_n(C\ ,\ X).$$

Dabei bezeichne X das gemeinsame Bild der X_i in C.

Bemerkung
Mit

$$|C| = \varinjlim_{i \in I} |C_i| \text{ und } \mathrm{Mor}\ C = \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Mor}\ C_i$$

gilt auch allgemeiner für die Nerven[55]

---

[53] d.h. die Kategorie ist nicht leer und ist gerichtet (vgl. Bass, H.: Algebraic K- theory, I, §8), d.h. die beiden folgenden Bedingungen sind erfüllt:
1. Je zwei Objekte sind Quellen von Morphismen mit demselben Ziel.
2. Je zwei Morphismen derselben Hom-Menge können gleich gemacht werden durch Anhängen eines Morphismus.

[54] Wir definieren C als die Kategorie mit den Objekten

$$|C| := \varinjlim_{i \in I} |C_i|$$

und den Morphismen

$$\mathrm{Mor}(C) := \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Mor}(C_i).$$

Beide Limites sind in der Kategorie der Mengen Ens zu nehmen. So ist $|C|$ gerade die disjunkte Vereinigung der $|C_i|$, wobei Elemente identifiziert werden, die bei Abbildungen des direkten Systems ineinander übergehen. Dann besitzt C die Universalitätseigenschaft des direkten Limes. Insbesondere kommutieren die Funktoren

$$(\text{Kleine Kategorien}) \longrightarrow \mathrm{Ens},\ C \mapsto |C|,$$

und

$$(\text{Kleine Kategorien}) \longrightarrow \mathrm{Ens},\ C \longrightarrow \mathrm{Mor}(C),$$

mit filtrierten direkten Limites.

[55] Weil jedes Objekt und jeder Morphismus von NC bereits durch endlich viele Objekte und Morphismen aus C gegeben sind.

$$N(C) = \varinjlim_{i \in I} N(C_i)$$

Beweis. Weil I filtrierend ist und

$$NC = \varinjlim_{i \in I} N(C_i)$$

gilt, kommt jede simpliziale Teilmenge von NC mit einer endlichen Anzahl nicht-entarteter Simplexe von einer simplizialen Teilmenge eines $N(C_i)$. Diese simpliziale Teilmenge von $N(C_i)$ ist außerdem eindeutig festgelegt , wenn man von den Vergrößerungen des Index i in einer offensichtlichen Weise absieht. Nun ist jede kompakte Teilmenge eines CW-Komplexes ganz in einem endlichen Teilkomplex enthalten.[56] Deshalb kommt jede kompakte Teilmenge von BC von einer kompakten Teilmenge eines BC_i , welche eindeutig bestimmt ist , wenn man von einer Vergrößerung von i im offensichtlichem Sinne absieht. Die Proposition leitet sich in einfacher Weise aus dieser Beobachtung ab.[57]
QED.

2.1.4.7 Folgerung 1: direkter Limes über Homotopie-Äquivalenzen

Falls in der Situation der obigen Proposition der Funktor

$$C_i \to C_j$$

für jeden Morphismus $i \to j$ in I eine Homotopie-Äquivalenz ist, so ist der Funktor

$$C_i \to C$$

für jedes $i \in I$ ebenfalls eine Homotopie-Äquivalenz.

Beweis. Wir ersetzen I durch die kofinale[58] Kategorie

$$i\backslash I$$

der Objekte unterhalb von i[59] und erreichen so, daß i ein initiales Objekt von I ist. Auf Grund der Voraussetzungen der Folgerung und auf Grund der Proposition induziert dann

---

[56] Weil die offenen Simplexe eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge bilden (die Vereinigung aller offenen Simplexe ist der gesamte Raum).

[57] Zum Beispiel kommt so jeder Weg von BC - weil sein Bild kompakt ist - von einem Weg in einem BC_i , und jede Homotopie zweier Wege in BC - weil deren Bild kompakt ist - von einer Homotopie in einem BC_i.

[58] Jedes Objekt $x \in I$ besitzt eine "obere Schranke" y in $i\backslash I$, d.h. es gibt einen Morphismus $x \longrightarrow y$. Beim Einschränken auf kofinale Teilkategorien ändert sich der direkte Limes eines Funktors nicht.

[59] $i\backslash I$ ist die duale Konstruktion der Kategorie I/i der Objekte von I, die über dem Objekt i liegen. Genauer, die Objekte von $i\backslash I$ sind die Paare (α, f) bestehend aus einem Objekt $\alpha \in I$ und einem Morphismus $f: i \longrightarrow \alpha$. Für je zwei Objekte (α, f) und (α', f') von $i\backslash I$ sind die Morphismen von (α, f) nach (α', f') gerade die Morphismen $\alpha \longrightarrow \alpha'$ von I, für welche das Diagramm

$$BC_{i.} \to BC$$

einen Isomorphismus der Homotopie-Gruppen[60]. Auf Grund eines wohlbekannten Satzes von Whitehead[61] ist dann aber $BC_{i.} \to BC$ eine Homotopie-Äquivalenz.

QED

$$\begin{array}{ccc} i & \longrightarrow & \alpha \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \alpha' \end{array}$$

kommutativ ist.

[60] Für jedes Objekt $j \in i\backslash I$ hat man genau einen Morphismus

$$i \longrightarrow j$$

in $i\backslash I$. Dieser induziert nach Wahl der Funktoren $C_{i.} \longrightarrow C_{j.}$ eine Homotopie-Äquivalenz $BC_{i.} \longrightarrow BC_{j.}$, d.h. einen Isomorphismus

$$\pi_n(C_{i.}, X_{i.}) \xrightarrow{\cong} \pi_n(C_{j.}, X_{j.}).$$

Letztere Isomorphismen bilden ein direktes System. Durch Übergang zum direkten Limes erahalten wir

$$\pi_n(BC_{i.}, X_{i.}) = \pi_n(C_{i.}, X_{i.}) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{i \in i\backslash I} \pi_n(C_{j.}, X_{j.}),$$

und nachj Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} \varinjlim_{i \in i\backslash I} \pi_n(C_{j.}, X_{j.}) &= \varinjlim_{i \in I} \pi_n(C_{j.}, X_{j.}) \\ &= \pi_n(\varinjlim_{i \in I} C_{j.}, X) \qquad \text{(nach 2.1.4.6)} \\ &= \pi_n(C, X) \\ &= \pi_n(BC, X). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, $BC_{i.} \longrightarrow BC$ induziert einen Isomorphismus der Homtopie-Gruppen.

[61] vgl. Spanier, E.H.: Algebraic topology, Chapter 7 Homotopy theory, $ 6 CW-Komplexe, Th. 9:

Isf f: $(X,x) \longrightarrow (Y,y)$ eine stetige Abbildung linear zusammenhängender punktierter topologischer Räume, welche Isomorphismen

$$\pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y,y),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

induziert, so induziert sie auch Isomorphismen der reduzierten Homologie-Gruppen

$$H_n(X,x) \longrightarrow H_n(Y, y),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

und Switzer, R.M.: Algebraic topology - homology and homotopy, Chapter 10 Classical homotopy theory, Corollary 10.29.

Ist f: $(X, x) \longrightarrow (Y, y)$ eine stetige Abbildung linear zusammenhängender punktierter Zell-Komplexe, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist eine Homotopie-Äquivalenz.

(ii) f induziert Isomorphismen $H_n(X, x) \longrightarrow H_n(X, y)$ für alle n.

2.1.4.8 Folgerung 2: Kontrahierbarkeit filtrierender Kategorien

Jede filtrierende Kategorie ist kontrahierbar.
Beweis. Sei I eine filtrierende Kategorie. Dann ist I der induktive Limes des Funktors

$$I \to (\text{kleine Kategorien}),\ i \mapsto I/i = \text{Objekte von I über i.}^{62}$$

Die Kategorie I/i hat ein terminales Objekt, ist also kontrahierbar (nach 2.1.4.5). Der direkte Limes ist dann aber auch kontrahierbar (nach 2.1.4.6).[63]
QED.

---

[62] Die Objekte von I/i sind die Paare (α, f) bestehend aus einem Objekt $\alpha \in I$ und einem Morphismus $f: \alpha \longrightarrow i$. Für je zwei Objekte (α, f) und (α', f') von I/i sind die Morphismen von (α, f) nach (α', f') gerade die Morphismen $\alpha \longrightarrow \alpha'$ von I, für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longrightarrow & \alpha' \\ & \searrow \quad \downarrow & \\ & & i \end{array}$$

kommutativ ist. Diese Kategorien bilden ein induktives System, welches mit den Vergiß-Funktoren

$$I/i \longrightarrow I,\ (\alpha, f) \longrightarrow \alpha,$$

verträglich ist. Außerdem faktorisieren sich beliebige (Familien von) Funktoren

$$F_i: I/i \longrightarrow J,\ i \in |I|,$$

(mit irgendeiner Kategorie J), mit denen das induktive System verträglich ist, eindeutig über diese Vergiß-Funktoren: man setzt
$F(i) := F_{id._i}((i, id._i))$
und erhält so einen Funktor $F: I \longrightarrow J$, dessen Zusammensetzung mit dem i-ten Vergiß-Funktor gerade gleich F_i ist (und F ist der einzige Funktor mit dieser Eigenschaft).

[63] Für jedes Objekt $i_0 \in I$ gilt sogar $I = \varinjlim_{i_0 \in I/i} I/i$ (weil I filtrierend ist), also

$$\begin{aligned} \pi_n(I, i_0) &= \pi_n\left(\varinjlim_{i_0 \in I/i} I/i,\ i_0\right) \\ &= \varinjlim_{i_0 \in I/i} \pi_n(I/i, i_0) && \text{(nach 2.1.4.6)} \\ &= \varinjlim_{i_0 \in I/i} 0 && \text{(weil I/i ein terminales Objekt besitzt)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit besitzt BI dieselben Homotopie-Gruppen wie der einpunktige Raum pt. Die Einbettungen

$$pt \longrightarrow BI$$

induzieren Isomorphismen auf den Homotopie-Gruppen und sind damit nach dem Satz von Whitehead Homotopie-Äquivalenzen, d.h. die identische Abbildung

$$BI \longrightarrow BI$$

ist homotop zu einer Abbildung der Gestalt

$$BI \longrightarrow pt \longrightarrow BI.$$

Mit anderen Worten, BI ist kontrahierbar.

2.1.5 Hinreichende Kriterien für Homotopie-Äquivalenzen

2.1.5.1 Die Kategorie Y\f

Sei

$$f: C \to D$$

ein Funktor kleiner Kategorien. Wir bezeichnen die Objekte von C mit X, X' usw. und die Objekte von D mit Y, Y' usw. Ist

$$Y \in D$$

ein fest gewähltes Objekt, so bezeichne

$$Y\backslash f$$

die Kategorie der Paare (X, v) mit einem Morphismus

$$v: Y \to fX$$

von D, deren Morphismen

$$(X,v) \to (X',v')$$

gerade die Morphismen $w: X \to X'$ von C sind mit $f(w) \circ v = v'$.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ v \swarrow & & \searrow v' \\ fX & \xrightarrow{fw} & fX' \end{array}$$

Diese Kategorie heißt auch Kategorie der f-Objekte unter Y.

Beispiel
Ist f der identische Funktor, so ist

$$Y\backslash f = Y\backslash C$$

gerade die Kategorie der Objekte von C unterhalb von Y.

Beispiel
Seien C die Kategorie der topologischen Paare, D die Kategorie der topologischen Räume und f der Funktor

$$f: C \longrightarrow D,\ (X,Y) \mapsto Y.$$

Die Kategorie Y\f besteht dann aus den topologischen Paaren (X', Y') zusammen mit einer stetigen Abbildung

$$Y \longrightarrow Y'. \qquad (1)$$

Die Morphismen dieser Kategorie sind stetige Abbildungen

$$\varphi: (X', Y') \longrightarrow (X'', Y'')$$

topologischer Paare, deren Einschränkungen auf die Unterräume mit den obigen Abbildungen (1) kommutative Dreiecke bilden.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \swarrow & & \searrow \\ Y' & \xrightarrow{\varphi|Y'} & Y'' \end{array}$$

2.1.5.2 Die Kategorie f/Y

Sei

$$f: C \to D$$

ein Funktor kleiner Kategorien. Wir bezeichnen die Objekte von C mit X, X' usw. und die Objekte von D mit Y, Y' usw. Ist

$$Y \in D$$

ein fest gewähltes Objekt, so bezeichne

$$f/Y$$

die Kategorie der Paare (X, u) mit einem Morphismus u: fX → Y von D, deren Morphismen

$$(X, u) \to (X', u')$$

gerade die Morphismen w: X → X' sind mit u'∘f(w) = u.

$$\begin{array}{ccc} f(X) & \xrightarrow{fw} & f(X') \\ & u \searrow \quad \swarrow u' & \\ & Y & \end{array}$$

Diese Kategorie heißt auch Kategorie der f-Objekte über Y.

Bemerkung
Die Definition ist dual zu der der Kategorie der f-Objekte unter Y: betrachtet man den Funktor f als Funktor f: $C^{op} \longrightarrow D^{op}$, so geht f/Y in die Kategorie Y\f über.

Beispiel

Sei C die Kategorie der Vektorraumbündel und Bündel-Abbildungen, wobei wir unter einer Bündel-Abbildung zwei Vektorraumbündel

$$V \longrightarrow X \text{ und } V' \longrightarrow X'$$

ein kommutatives Diagramm stetiger Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X' \end{array}$$

verstehen wollen, wobei die obere horizontale Abbildung auf den Fasern der vertikalen Abbildungen lineare Abbildungen induzieren soll.
Weiter sei C' die Kategorie der topologischen Räume und

$$f: C \longrightarrow C',\ V \longrightarrow X \mapsto X,$$

der Vergiß-Funktor, welcher jedes Vektorraum-Bündel auf dessen Basis abbildet. Die Kategorie

$$f/Y$$

ist dann gerade die Kategorie der Vektorräum-Bündel V ⟶ X, deren Basis über Y liegt (zusammen mit einem Struktur-Morphismus X ⟶ Y). Die Morphismen dieser Kategorie sind die Bündel-Morphismen, die mit den Struktur-Morphismen verträglich sind, d.h. kommutative Diagramme stetiger Abbildungen der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X', \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Y & \end{array}$$

wobei die obere horizontale Abbildung lineare Abbildungen auf den Fasern der oberen vertikalen Abbildungen induziert.

2.1.5.3 Theorem A

Sei

$$f: C \to D$$

ein Funktor kleiner Kategorien. Ist die Kategorie

$$Y\backslash f$$

kontrahierbar für jedes Objekt Y von D, so ist der Funktor f eine Homotopie-Äquivalenz.

Bemerkungen

(i) Wegen Bemerkung (ii) von 2.1.4.1[64] ist die Aussage des Satzes dualisierbar:
Der Funktor f:C $\longrightarrow$ D ist eine Homotopie-Äquivalenz, falls Y\f kontrahierbar ist für jedes Objekt Y von D.

(ii) Beispiel: Sei g: K $\to$ K' eine simpliziale Abbildung von Simplizialkomplexen, und sei

$$f: J \to J'$$

die induzierte Abbildung auf den durch '$\subseteq$' halbgeordneten Mengen der Simplexe von K bzw. K', so daß Realisierung von g homöomorph ist zu

$$Bf: BJ \to BJ'.^{65}$$

Bezeichnet

$$\widetilde{\sigma}'$$

das Element von J', welches dem Simplex σ' von K' enstpricht[66], so ist

$$f/\widetilde{\sigma}'$$

gerade die halbgeordnete Menge der Simplexe von $g^{-1}(\sigma')$. In dieser Situation sagt das Theorem aus, daß f eine Homotopie-Äquivalenz ist, wenn das vollständige Urbild von jedem abgeschlossenen Simplex kontrahierbar ist.

(ii) Bevor wir den Satz beweisen (vgl. 2.1.6.8), leiten wir eine Folgerung ab. Zunächst erinnern wir aber in geeigneter Form an die Definitionen der Begriffe Faser-Kategorie und Kofaser-Kategorie im Sinne von [SGA 1, Exposé VI].

2.1.5.4 Faser-Kategorien

Sei

$$f: C \to D$$

ein Funktor kleiner Kategorien. Für jedes Objekt Y$\in$D bezeichne

$$f^{-1}(Y)$$

---

[64] d.h. wegen der Existenz eines natürlichen Homöomorphismus $BC \overset{\cong}{\longrightarrow} BC^{op}$.

[65] Bf ist die durch f auf den baryzentrischen Unterteilungen induzierte Abbildung.

[66] d.h. $\widetilde{\sigma}$' ist die Menge der Ecken von σ' (und steht für das Baryzentrum in BJ' der Realisierung von σ').

die Faser von f über Y, d.h. die Teilkategorie von C, deren Morphismen gerade die Morphismen von C sind, die bei f in den identischen Morphismus von Y abgebildet werden.
Man sagt dann, der Funktor f macht C zu einer Präfaser-Kategorie über D, wenn für jedes Objekt $Y \in D$ der Funktor

$$f^{-1}(Y) \to Y\backslash f,\ X \mapsto (X, id_Y),$$

einen rechtsadjungierten Funktor

$$Y\backslash f \to f^{-1}(Y),$$
$$(X, Y \xrightarrow{v} f(X)) \mapsto v^*X$$
$$X \xrightarrow{w} X' \mapsto v^*(X) \xrightarrow{v^*(w)} v^*(X')$$

besitzt.[67]
Für jeden Morphismus $v: Y \to Y'$ in D erhalten wir dann einen Funktor[68]

$$v^*: f^{-1}(Y') \longrightarrow f^{-1}(Y)$$

der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist und Basiswechsel-Funktor oder auch inverses Bild heißt.

---

[67] Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ v\swarrow & & \searrow v' \\ fX & \xrightarrow{fw} & fX' \end{array}$$

ist kommutativ, und es gilt

$$f(v^*X) = Y,\ f(v^*X') = Y,\ f(v^*(w)) = id_Y$$

[68] Genauer, v^* ist die Zusammensetzung

$$v^*: f^{-1}(Y') \longrightarrow Y/f \longrightarrow f^{-1}(Y),$$
$$X' \mapsto (X', Y \xrightarrow{v} Y' = f(X')) \mapsto v^*X,$$

des durch v definierten Funktors

$$f^{-1}(Y') \longrightarrow Y/f\ ,\ X' \mapsto (X', Y \xrightarrow{v} Y' = f(X'))$$

mit dem zu $f^{-1}(Y) \to Y\backslash f,\ X \mapsto (X, id_Y)$, rechtsadjungierten Funktor $Y/f \longrightarrow f^{-1}(Y)$.

Ist $w: X' \longrightarrow X''$ ein Morphismus aus $f^{-1}(Y')$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ v\swarrow & & \searrow v \\ Y' & \xrightarrow{id} & Y' \\ \| & & \| \\ fX' & \xrightarrow{fw} & fX'' \end{array}$$

kommutativ, d.h. w ist ein Morphismus von Y/f und $v^*(w): v^*(X') \longrightarrow v^*(X'')$ ein wohldefinieter Morphismus von $f^{-1}(Y)$.
Die Familie der Funktoren

$$v^*: f^{-1}(Y') \longrightarrow f^{-1}(Y) \text{ mit } v: Y \longrightarrow Y' \in \mathrm{Mor}(D) \qquad (1)$$

ist durch dieselben Daten definiert wie der rechtsadjungierte Funktor $Y/f \longrightarrow f^{-1}(Y)$. Erstere ist durch letzteren definiert und definiert diesen. Aus der Eindeutigkeit des adjungierten Funktors bis auf natürliche Isomorphie ergibt sich die Eindeutigkeit der Familie (1) (bis auf natürliche Isomorphie).

Die Präfaser-Kategorie f: C→D heißt Faser-Kategorie, wenn für je zwei komponierbare Morphismen u,v von D der kanonische funktorielle Morphismus

$$u^*v^* \to (vu)^*$$

ein Isomorphismus ist.[69]

Beispiel

Seien D = Top die Kategorie der topologischen Räume, C die Kategorie der Vektorraumbündel und

$$f: C \longrightarrow D,\ V \longrightarrow X \mapsto X,$$

der Vergiß-Funktor, der jedes Vektorraumbündel auf seinen Basisraum abbildet. Für jeden topologischen Raum $Y \in D$ ist

$$f^{-1}(Y)$$

die Kategorie der Vektorraum-Bündel über Y. Das Bild des Funktors

$$F_*: f^{-1}(Y) \longrightarrow Y\backslash f,\ X \mapsto (X, Y \xrightarrow{id} Y = f(X)),$$

besteht gerade aus den Vektorraum-Bündeln über Y und den Bündel-Abbildungen, die auf der Basis die identische Abbildung induzieren. Betrachten wir den Funktor

$$F^*: Y\backslash f \longrightarrow f^{-1}(Y),\ (V \xrightarrow{\pi} X, Y \xrightarrow{v} X) \mapsto v^*(V \xrightarrow{\pi} X)$$

Dabei sei $v^*(V \xrightarrow{\pi} X)$ das Vektorraumbündel über Y mit dem Bündel-Raum

$$V \times_X Y = \{(x,y) \in V \times Y \mid \pi(x) = v(y)\}$$

und der Bündel-Abbildung

$$v^*(\pi): V \times_X Y \longrightarrow Y,\ (x,y) \mapsto y.$$

Man beachte die Faser über y ist gerade

$$v^*(\pi)^{-1}(y) = \{(x,y) \mid \pi(x) = v(y)\} \cong \pi^{-1}(v(x))$$

in natürlicher Weise isomorph zur Faser des Ausgangsbündels über dem Bild von y bei der Abbildung v. Vergleichen wir die Hom-Mengen

$$\mathrm{Hom}_{Y\backslash f}(F_*(V \xrightarrow{\pi} Y),(V' \xrightarrow{\pi'} Y', Y \xrightarrow{v} Y'))$$

$$= \mathrm{Hom}_{Y\backslash f}((V \xrightarrow{\pi} Y, Y \xrightarrow{id} Y), (V' \xrightarrow{\pi'} Y', Y \xrightarrow{v} Y'))$$

und

$$\mathrm{Hom}_{f^{-1}(Y)}(V \xrightarrow{\pi} Y, F^*(V' \xrightarrow{\pi'} Y', Y \xrightarrow{v} Y')).$$

$$= \mathrm{Hom}_{f^{-1}(Y)}(V \xrightarrow{\pi} Y, V' \times_Y, Y \longrightarrow Y).$$

Die erste besteht aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{a} & V' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ Y & \xrightarrow{b} & Y' \end{array} \qquad (1)$$

stetiger Abbildungen mit a linear auf den Fasern von π, für welche das Diagramm

---

[69] Siehe Anhang: Adjungierte Funktoren von Zusammensetzungen.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{id} & Y \\ & v\searrow & \downarrow b \\ & & Y' \end{array}$$

kommutativ ist, d.h. mit b = v. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Faserprodukt stehen diese kommutativen Vierecke in Bijektion mit den stetigen Abbildungen

$$c: V \longrightarrow V' \times_Y, Y = \{(v', y) \in V' \times Y \mid \pi'(v') = v(y)\}.$$

mit $pr_1 \circ c = a$ und $pr_2 \circ c = \pi$. Weil das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{c} & V' \times_Y, Y \\ \pi\downarrow & & \downarrow pr_2 \\ Y & = & Y \end{array}$$

kommutativ ist, liegen diese Abbildungen in der zweite Hom-Menge. Umgekehrt gehört zu jedem Element c aus der zweiten Hom-Menge eine Abbildung $pr_1 \circ c = a$, und damit ein kommutatives Diagramm (1), d.h. ein Element der ersten Hom-Menge. Wir haben damit gezeigt, der Funktor F* ist rechtsadjungiert zu F_*, d.h. C ist eine Präfaser-Kategorie über D = Top.
Es ist sogar eine Faser-Kategorie, denn für je zwei stetige Abbildungen

$$Y \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} Y''$$

und jedes Vektorraum-Bündel $\pi'': V'' \longrightarrow Y''$ gilt

$$\begin{aligned} u^*v^*V'' &= (V'' \times_{Y''} Y') \times_{Y'} Y \\ &= \{ (\alpha, y) \in (V'' \times_{Y''} Y') \times Y \mid u(y) = pr_2(\alpha) \} \\ &= \{ (v'', y', y) \in V'' \times Y' \times Y \mid u(y) = y' \text{ und } v(y') = \pi''(v'') \} \\ &= \{ (v'', u(y), y) \in V'' \times Y' \times Y \mid v(u(y)) = \pi''(v'') \} \\ &\cong^{70} \{ (v'', y) \in V'' \times Y \mid v(u(y)) = \pi''(v'') \} \\ &= (vu)^*V''. \end{aligned}$$

2.1.5.5 Kofaser-Kategorien

Sei

$$f: C \to D$$

ein Funktor kleiner Kategorien. Der Funktor f macht C zu einer Präkofaser-Kategorie über D, wenn für jedes Objekt $Y \in D$ der Funktor

$$f^{-1}(Y) \to f/Y,\ X \mapsto (X, id_Y)$$

einen linksadjungierten Funktor

$$f/Y \to f^{-1}(Y),\ (X, v) \mapsto v_*X,.$$

Für jeden Morphismus $v: Y \to Y'$ in D erhalten wir dann einen Funktor

$$v_*: f^{-1}(Y) \to f^{-1}(Y'),\ X \mapsto (X, v) \mapsto v_*X',$$

---

[70] die mittlere Koodinate ist durch die dritte bereits eindeutig festgelegt.

der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist und Kobasiswechsel-Funktor oder auch direktes Bild heißt.
Die Präkofaser-Kategorie heißt Kofaser-Kategorie, wenn für je zwei komponierbare Morphismen u, v von D der kanonische funktorielle Morphismus

$$(vu)_* \to v_* u_*$$

ein Isomorphismus ist.

2.1.5.6 Folgerung: (Ko-) Faser-Kategorien mit kontrahierbaren Fasern

Ist f. $C \to D$ eine Faser- oder Kofaser-Kategorie mit der Eigenschaft, daß $f^{-1}(Y)$ kontrahierbar ist für jedes $Y \in D$, so ist f eine Homotopie-Äquivalenz.
Beweis. Folgt aus 1.4.7 und 1.5.3.
QED.

2.1.5.7 Beispiel

Seien C eine kleine Kategorie und bezeichne

$$S(C)$$

die Kategorie, deren Objekte die Morphismen von C sind und deren Hom-Mengen

$$\mathrm{Hom}(u: X \to Y, u': X' \to Y')$$

aus den Paaren $(v: X' \to X , w: Y \to Y')$ von Morphismen aus C besteht, für welche das folgende Diagramm kommutiv ist.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{v} & X' \\ u\downarrow & & \downarrow u' \\ Y & \xrightarrow{w} & Y' \end{array}$$

Man hat die Funktoren

$$C^0 \xleftarrow{s} S(C) \xrightarrow{t} C,$$

die die jedem Objekt von S(C) in dessen Quelle bzw. dessen Ziel abbilden und welche Source-Funktor bzw. Target-Funktor heißen.

Es ist leicht zu sehen, diese Funktoren sind kogefasert. Die Kategorien

$$s^{-1}(X) = X\backslash C \text{ und } t^{-1}(Y) = (C/Y)^0$$

haben initiale Objekte, sind also kontrahierbar. Nach der Folgerung sind s und t Homotopie-Äquivalenzen.
Bemerkungen

(i) ???? S(C) ist gerade die Kofaser-Kategorie über $C^0 \times C$ mit diskreten Fasern, die durch den Funktor $(X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$ definiert ist.

(ii) Die Zusammensetzung $(Bt)^{-1} \circ Bs: BC \longrightarrow BC^{op}$ der Homotopie-Äquivalenz Bs mit einer Homotopie-Inversen von Bt ist die einfachst Art, die Homotopie-Äquivalenz

$$BC \xrightarrow{\cong} BC^{op}$$

von 2.1.4.1 Bemerkung (ii) zu realisieren.

(iii) Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Theorem A zu (vgl. 2.1.5.3). Wir werden eine Standard-Aussage zur Realisierung eines bisimplizialen Raumes benötigen, die wir jetzt ableiten.

2.1.5.8 Der Realisierungsfunktor

Bezeichne

$$\mathbf{Ord} = \Delta$$

die Kategorie der geordneten Mengen $[p] = \{0 < 1 < ... < p\}$, $p \in N$, so daß nach Definition ein <u>simpliziales Objekt</u> ein auf **Ord** definierter kontravarianter Funktor ist.

Der <u>Realisierungsfunktor</u>

$$|?|:\mathrm{Funct}(\mathbf{Ord}^0, \mathrm{Top}) \to \mathrm{Top},\ X \mapsto |X|,$$

von der Kategorie der simplizialen topologischen Räume mit Werten in der Kategorie der topologischen Räume (vgl. [Segal 1]) kann definiert werden als linksadjungierter Funktor zum Funktor

$$S: \mathrm{Top} \to \mathrm{Funct}(\mathbf{Ord}^0, \mathrm{Top}),\ Y \mapsto (\ \mathbf{p} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^p, Y),$$

welcher dem Raum Y den simplizialen Raum

$$p \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^p, Y),$$

zuordnet, wobei <u>Hom</u> den Raum der stetigen Funktionen bezeichnet und Δ^p das Simplex, welches **p** als Menge der Ecken besitzt.[71] Insbesondere kommutiert der Realisierungsfunktor mit direkten Limites.[72]

---

[71] Für jeden topologischen Raum X bezeichne

$$SX$$

die simplizieale Menge der singulären Simplexe von X, d.h.

$$SX_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta_n, X).$$

Auf diese Weise ist ein Funktor

$$S: \mathrm{Top} \longrightarrow (\text{Simpliziale Mengen})$$

definiert. Zu zeigen ist, daß dieser rechtsadjungiert ist zum Realisierungsfunktor

$$|?|: (\text{Simpliziale Mengen}) \longrightarrow \mathrm{Top}.$$

Es soll also für jede simpliziale Menge X und jeden topologischen Raum Y eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(|X|, Y) \overset{\cong}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\text{Simpliziale Mengen}}(X, S(Y)) \qquad (1)$$

bestehen, welche funktoriell in X und Y ist. Sei

$$f: |X| \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Wir haben für jedes n eine Abbildung

$$X_n \longrightarrow SY_n \qquad (2)$$

zu konstruieren. Für jedes $s \in X_n$ betrachten wir die von s erzeugte simpliziale Teilmenge <s> von X, d.h. den Durchschnitt aller simplizialen Teilmengen von X, welche das n-Simplex s enthalten. Die Simplexe von <s> sind gerade die Bilder von s bei allen Zusammensetzungen von Entartungs- und Seitenabbildungen von X. Die natürliche Inklusion $<s> \subseteq X$ induzierte eine stetige Abbildung der Realisierungen

$$|<s>| \longrightarrow |X|$$

2.1.5.9 Die Realisierungen eines bisimplizialen Raums

Sei T ein bisimplizialer Raum, d.h. ein Funktor

$$Ord^0 \times Ord^0 \to Top, (\mathbf{p},\mathbf{q}) \mapsto T_{pq}.$$

Durch Realisieren bezüglich q mit festgehaltenem p erhalten wir einen simplizialen Raum

$$\mathbf{p} \mapsto |\, \mathbf{q} \mapsto T_{pq}\,|,$$

welcher seinerseits eine Realisierung besitzt.
Wir können andererseits erst bezüglich p realisieren und dann bezüglich q. Und wir können schließlich die Realisierung der Diagonalen

$$\mathbf{p} \mapsto T_{pp}$$

bilden. Es ist wohlbekannt (vgl. [Tornehave]), daß alle drei Realisierungen übereinstimmen.

2.1.5.10 Lemma: Vergleich der drei Realisierungen eines bisimplizialen Raums

$$|\, p \mapsto T_{pp}\,| = |\, \mathbf{p} \mapsto |\, \mathbf{q} \mapsto T_{pq}\,|\,| = |\, \mathbf{q} \mapsto |\, \mathbf{p} \mapsto T_{pq}\,|\,|$$

Die iterierten Seitenabbildungen, welche die Ecken von s definieren, definieren eine lineare Abbildung $\Delta_n \longrightarrow |<s>|$, welche den i-ten Standard-Einheitsvektor in die i-te Ecke von $|<s>|$ überführt. Durch Zusammensetzen erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\Delta_n \longrightarrow |<s>| \longrightarrow |X| \xrightarrow{f} Y.$$

Diese sei gerade das Bild von s bei der Abbildung (1).
Wir haben so die Abbildung (2) beschrieben, und damit auch (1). Beschreiben wir die Umkehrung. Sei

$$g: X \longrightarrow SY$$

ein Morphismus von simplizialen Mengen. Für jedes n haben wir ene Abbildung

$$g_n : X_n \longrightarrow SY_n,$$

welche jedem n-Simplex $s \in X_n$ eine stetige Abbildung $\Delta_n \longrightarrow Y$ zuordnet. Alle diese Abbildungen zusammen definieren eine stetige Abbilduing auf der disjunkten Vereinigung

$$\vee_{s \in X_n, n=0,1,..} \Delta_n \times X_n \longrightarrow Y.$$

Weil g eine natürliche Transformation ist, hat diese Abbildung in Punkten, die beim Übergang zur Realisierung identifiziert werden, denselben Wert. Sie induziert deshalb eine stetige Abbildung

$$f:|X| \longrightarrow Y,$$

welche gerade das Urbild von g bei der Abbildung (1) ist (durch Einschränken von f auf die Simplexe der Triangulierung X von |X| erhält man die ursprünglich durch g gegebenen singulären Simplexe zurück).

[72] siehe den Anhang 'Eigenschaften von adjungierten Funktoren'

Beweis.Wir nehmen zunächst an, T ist von der Gestalt[73]

$$h^{rs}\times S\colon (\mathbf{p},\mathbf{q}) \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbf{p},\mathbf{r})\times\mathrm{Hom}(\mathbf{q},\mathbf{s})\times S,$$

wobei S einen topologischen Raum bezeichne. Dann gilt

$$|p \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbf{p},\mathbf{r})\times\mathrm{Hom}(\mathbf{p},\mathbf{s})\times S\,| = \Delta^r\times\Delta^s\times S.$$

Dies ist der grundlegende Hoömomorphismus, denn man zum Beweis dafür benutzt, daß die geometrische Realisierung mit Produkten kommutiert (vgl. [Milnor 1])[74]. Andererseits haben wir

$$|\mathbf{p} \mapsto |\mathbf{q} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbf{p},\mathbf{r})\times\mathrm{Hom}(\mathbf{q},\mathbf{s})\times S|| = |p \mapsto \mathrm{Hom}(p,r)\times\Delta^s\times S| = \Delta^r\times\Delta^s\times S.$$

Eine analoge Formel erhält man, wenn man die doppelten Realisierungen in der anderen Reihenfolge bildet.
Der geforderte funktorielle Morphismus besteht also auf der vollen Teilkategorie der bisimplizialen Räume dieser Gestalt.
Für beliebige T hat man aber eine natürliche Darstellung[75]

---

[73] Für jedes $[r] \in \Delta$ ist der Funktor

$$\mathrm{Hom}(?, [r])\colon \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens},\ [n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], [r]),$$

eine simpliziale Menge. Die entarteten n-Simplexe sind nach Definition diejenigen Simplexe, die im Bild einer der Entartungsabbildungen ε^i liegen,

$$\varepsilon^i\colon \mathrm{Hom}([n-1], [r]) \longrightarrow \mathrm{Hom}([n], [r]),\ [n-1] \xrightarrow{\alpha} [r] \mapsto [n] \xrightarrow{\varepsilon_i} [n-1] \xrightarrow{\alpha} [r],$$

d.h. die entarteten n-Simplexe sind gerade die Elemente von

$$\mathrm{Hom}([n], [r]),$$

welche nicht injektiv sind, und die nicht-entarteten sind die injektiven Elemente dieser Hom-Menge. Das Bild eines nicht-entarteten n-Simplexes besteht gerade aus n+1 Elementen, und das Simplex ist durch dieses Bild eindeutig bestimmt.

Die Menge der nicht-entarteten n-Simplexe entspricht so gerade der Menge der Teilmengen von [r] mit n+1 Elementen, und damit gerade der Menge der n-dimensionalen Seiten des r-dimensionalen Standard-Simplex Δ^r. Als Realisierung dieser simplizialen Menge erhalten wir

$$|\,\mathrm{Hom}(?, [r])| = \Delta^r$$

[74] siehe auch den Anhang ‘Satz von Eilenberg-Zilber’.

[75] Dies sind auf $\mathrm{Ord}^0\times\mathrm{Ord}^0$ definierte Funktoren. Für jedes Objekt $(u, v) \in \mathrm{Ord}^0\times\mathrm{Ord}^0$ hat die Darstellung die folgende Gestalt

$$\oplus_{(\mathbf{r'},\mathbf{s'})\to(\mathbf{r},\mathbf{s})} \mathrm{Hom}((u,v),(r',s'))\times T_{r,s} \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \oplus_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} \mathrm{Hom}((u,v),(r,s))\times T_{rs} \xrightarrow{f} T_{u,v},$$

Die Abbildungsvorschriften sind wie folgt:
Auf der zu (r,s) gehörigen Komponente hat f die Gestalt

$$(u\xrightarrow{\alpha}r,\ v\xrightarrow{\beta}s,\ \sigma\in T_{r,s}) \quad \overset{f}{\mapsto} \quad T(\alpha,\beta)\sigma$$

Auf der zu $(r', s') \xrightarrow{\xi,\psi} (r, s) = (r' \xrightarrow{\xi} r,\ s' \xrightarrow{\psi} s)$ gehörigen Komponente haben g und die h die Gestalt

$$(u\xrightarrow{\alpha}r',\ v\xrightarrow{\beta}s',\ \sigma\in T_{r,s}) \quad \overset{g}{\mapsto} \quad (u \xrightarrow{\xi\alpha} r,\ v \xrightarrow{\psi\beta} s,\ \sigma\in T_{r,s}) \in \mathrm{Hom}((u,v),(r,s))\times T_{rs}$$

$$(u\xrightarrow{\alpha}r',\ v\xrightarrow{\beta}s',\ \sigma\in T_{r,s}) \quad \overset{h}{\mapsto} \quad (u\xrightarrow{\alpha}r',\ v\xrightarrow{\beta}s',\ T(\xi,\psi)\sigma\in T_{r',s'}) \in \mathrm{Hom}((u,v),(r',s'))\times T_{r',s'}$$

$$\oplus_{(\mathbf{r'},\mathbf{s'})\to(\mathbf{r},\mathbf{s})} h^{r's'}\times T_{r,s} \rightrightarrows \oplus_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} h^{rs}\times T_{rs} \to T,$$

d.h. eine exakte Sequenz in dem Sinne, daß der Morphismus rechts gerade der Kokern der beiden Morphismen links ist. Da die drei betrachteten Funktoren von der Kategorie der simplizialen Räume in die Kategorie der topologischen Räume mit direkten Limiten kommutieren, folgt die Behauptung des Lemmas.[76]
QED.

2.1.6 Die exakte Homotopie-Sequenz

2.1.6.1 Die lange Homotopie-Sequenz einer stetigen Abbildung

Seien

$$g: E \to B$$

eine stetige Abbildung und

$$b\in B$$

ein Punkt. Die Homotopie-Faser von g über b ist definiert als der Raum

$$F(g,b) = E\times_B B^I \times_B \{b\}$$

Aus den Definitionen ergibt sich, daß

$$f\circ g = f\circ h$$

gilt. Betrachten wir die Äquivalenz-Relation auf der mittleren direkten Summe, die erzeugt wird von den Relationen

$$f(x) \sim g(x),$$

wobei x die Elemente der direkten Summe links durchläuft. Wir haben zu zeigen, wenn

$$(u\xrightarrow{\alpha}r,\ v\xrightarrow{\beta}s,\ \sigma\in T_{r,s}) \text{ und } (u\xrightarrow{\alpha'}r',\ v\xrightarrow{\beta'}s',\ \sigma'\in T_{r',s'}) \qquad (1)$$

bei f dasselbe Bild haben, d.h. wenn

$$T(\alpha,\beta)\sigma = T(\alpha',\beta')\sigma' \qquad (2)$$

gilt, so sind die beiden Tripel (1) äquivalent. Nach Definition der Äquivalenz-Relation gilt (α , β , ξ, ψ $\mapsto$ id, id, α, β)

$$(u\xrightarrow{\alpha}r,\ v\xrightarrow{\beta}s,\ \sigma\in T_{r,s}) \sim (u\xrightarrow{id}u,\ v\xrightarrow{id}v,\ T(\alpha,\beta)\sigma\in T_{u,v})$$

$$(u\xrightarrow{\alpha'}r',\ v\xrightarrow{\beta'}s',\ \sigma'\in T_{r',s'}) \sim (u\xrightarrow{id}u,\ v\xrightarrow{id}u,\ T(\alpha',\beta')\sigma'\in T_{u,v})$$

Die beiden rechten Tripel sind wegen (2) gleich. Also sind die beiden linken Tripel äquivalent.

[76] Weil |?| mit direkten Limites kommutiert, erhält man beim Übergang zur Realisierung wieder eine exakte Sequenz, d.h. die Sequenz

$$\vee_{(\mathbf{r'},\mathbf{s'})\to(\mathbf{r},\mathbf{s})} |h^{r's'}\times T_{r,s}| \rightrightarrows \vee_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} |h^{rs}\times T_{rs}| \to |T|,$$

ist exakt. Dabei kann man unter der Realisierung eines Bifunktors einmal die Realisierung der Diagonalen und zum andern die iterierte Realisierung bezüglich der einzelnen Argumente verstehen.

Nach dem ersten Teil des Beweises bleibt der linke Teil der Sequenz unverändert, wenn man zwischen der einzelnen Varianten der Realisierung hin- und herwechselt. Dann sind aber auch die Realisierungen |T| für die verschiedenen Varianten der Definition von |?| isomorph.

der Paare (e, p) aus einem Punkt e∈E und einem Weg in B von g(e) nach b.[77] Für jeden Punkt $e \in g^{-1}(b)$ hat man eine exakte Homotopie-Sequenz von g bezüglich des Grundpunktes b,

$$... \to \pi_{i+1}(B,b) \to \pi_i(F(g,b), \tilde{e}) \to \pi_i(E,e) \xrightarrow{g_*} \pi_i(B,b) \to ...$$

mit $\tilde{e} = (e, \bar{b})$, wobei $\bar{b}$ den konstanten Weg in b bezeichnet.[78]

2.1.6.2 Vergleich von B(Y\f) mit den Homotopie-Fasern einer Abbildung

Seien f: C→D ein Funktor kleiner Kategorien und Y∈D ein Objekt. Ist j der Funktor

$$j: Y\backslash f \to C\ ,\ (X, Y \xrightarrow{v} fX) \mapsto X,$$

so definiert die Morphismen-Familie

$$\{ Y \xrightarrow{v} fX \}_{(X,v)\in Y\backslash f}$$

eine natürliche Transformation[79]

$$const_Y \to fj : Y\backslash f \to D,$$

des konstanten Funktors

$$const_Y : Y\backslash f \to D,\ (X, Y \xrightarrow{v} fX) \mapsto Y$$

mit dem Wert Y in den Funktor

$$fj: Y\backslash f \to D,\ (X, Y \xrightarrow{v} fX) \mapsto X.$$

Nach Proposition 2 (vgl. 2.1.4.2) ist fj homotop zum konstanten Funktor $const_Y$, d.h. die Komposition

$$B(Y\backslash f) \xrightarrow{Bj} BC \xrightarrow{Bf} BD$$

kontrahiert sich in natürlicher Weise in die konstante Abbildung mit dem Bild Y, d.h. das Bild von Bj liegt ganz in der Homotopie-Faser von Bf über Y. Wir erhalten auf diese Weise eine natürliche Abbilung[80]

---

[77] Der Raum B^I der Wege in B wird mit der kompakt-offenen Topologie versehen.

[78] siehe dan Anhang: das Serre-Faserbündel zu einer stetigen Abbildung.

[79] Für jedes Objekt $\xi := (X, Y \xrightarrow{v} fX)$ der Kategorie Y\f hat man einen Morphismus

$$const(\xi) = Y \xrightarrow{v} f(X) = fj(\xi)$$

und für jeden Morphismus w: $\xi = (X, Y \xrightarrow{v} f(X)) \longrightarrow (X', Y \xrightarrow{v'} f(X')) = \xi'$ ein kommutatives Viereck

$$\begin{array}{ccc} const(\xi) & \longrightarrow & const(\xi') \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v'} \\ fj(\xi) & \xrightarrow{w} & fj(\xi') \end{array}$$

[80] Sei

$$H: B(Y/f) \times I \longrightarrow B(D)$$

die Homotopie von B(fj) = Bf∘Bj in den konstante Abbildung mit dem Wert Y, welche durch die natürliche Transformation definiert wird. Für jeden Punkt $x \in B(Y\backslash f)$ ist dann

(1) $$B(Y\backslash f) \to F(Bf, Y).$$

Bemerkungen

(i) Wir würden gern wissen, wann diese Abbildung eine Homotopie-Äquivalenz ist, denn dann haben wir eine exakte Sequenz, welche eine Beziehung zwischen den Homotopie-Gruppen der Kategorien Y\f, C und D herstellt.[81]

(ii) Die Homotopie-Fasern einer Abbildung über Punkten derselben linearen Komponente sind homotopie-äquivalent.[82] Deshalb ist eine notwendige Bedingung dafür, daß (1) eine Homotopie-Äquivalenz für alle Y ist, daß der Funktor

$$Y'\backslash f \to Y\backslash f, (X,v) \mapsto (X,vu)$$

für jeden Morphismus u: Y → Y' von D eine Homotopie-Äquivalenz ist.

(iii) Wir werden jetzt zeigen, daß die Bedingung von (ii) auch hinreichend ist.

(iv) Da Homotopie-Fasern keine klassifizierende Räume von Kategorien sind und deshalb etwas weit weg sind von allem, womit wir arbeiten werden, ist es sinnvoll die Aussagen mit Hilfe von homotopie-kartesischen Quadraten zu formulieren.

2.1.6.3 Homotopie-kartesiche Quadrate

Ein kommutatives Quadrat

(1)
$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{h'} & E \\ g'\downarrow & & \downarrow g \\ B' & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

von topologischen Räumen heißt homotopie-kartesisch, wenn die Abbildung

$$E' \to B'\times_B B^I \times_B E,\ e' \mapsto (g'(e'), \overline{hg'(b')}, h'(e')),$$

von E' ins Homotopie-Faserprodukt von h und g eine Homotopie-Äquivalenz ist.[83]

$$H|_{\{x\}\times I}: I = \{x\}\times I \longrightarrow B(d)$$

eine Kurve von B(fj)(x) = Bf(Bj(x)) nach Y. Nach Definition der Homotopie-Faser ist

$$(Bj(x), H|_{\{x\}\times I}) \in F(Bf, Y).$$

Abbildung (1) ist durch die Abbildungsvorschrift

$$B(Y\backslash f) \to F(Bf, Y),\ x \mapsto (Bj(x), H|_{\{x\}\times I})$$

gegeben.

[81] In der exakten Homotopie-Sequenz 2.1.6.1 zur stetigen Abbildung Bf: BC ⟶ BD könnte man die Homotopie-Faser F(Bf, Y) durch B(Y\f) ersetzen.

[82] Seien g: E ⟶ B die stetige Abbildung von 2.1.6.1 und γ: I ⟶ B ein Weg in B von b := γ(0) nach b' := γ(1). Dann sind die Abbildungen

$$F(g, b) \longrightarrow F(g, b'),\ (e, \delta) \longrightarrow (e, \gamma\circ\delta),$$

und

$$F(g, b') \longrightarrow F(g, b),\ (e, \delta) \longrightarrow (e, \gamma^{-1}\circ\delta),$$

zueinander homotopie-invers. Man beachte sie sind im allgemeinen nicht invers zueinander, weil zum Beispiel $\gamma^{-1}\circ\gamma\circ\delta$ im allgemeinen von δ verschieden ist. Die beiden Wege sind jedoch homotop: eine Homotopie ist zum Beispiel gegeben durch

$$I\times I \longrightarrow B\ ,\ (s, t) \mapsto \gamma_t^{-1}\circ\gamma_t\circ\delta(s).$$

[83] Die überstrichene mittlere Koordinate bezeichne den konstanten Weg im angegebenen Punkt.

Ein kommutatives Quadrat einer kleinen Kategorie heißt homotopie-kartesisch, wenn das zugehörige Quadrat der klassifizierenden Räume homotopie-kartesisch ist.

Bemerkung

Ist im obigen Quadrat der Raum B' kontrahierbar[84], so ist die Abbildung

$$F(g',b') \to E',\ (e',\omega',b') \mapsto e'$$

eine Homotopie-Äquivalenz für jedes $b' \in B'$.[85] Also hat man eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung[86]

(2) $$E' \to F(g',b') \to F(g,h(b')),$$

Wie man leicht sieht, ist das Quadrat in dieser Situation genau dann homotopie-kartesisch, wenn (2) eine Homotopie-Äquivalenz ist.[87]

2.1.6.4 Theorem B

Sei $f: C \to D$ ein Funktor kleiner Kategorien mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus $Y \to Y'$ in D der zugehörige Funktor

$$Y'\backslash f \to Y\backslash f,\ (X, Y' \xrightarrow{v'} f(X)) \mapsto (X, Y \longrightarrow Y' \xrightarrow{v'} f(X))$$

---

[84] Was zum Beispiel trivialerweise der Fall ist, wenn B' aus nur einem Punkt besteht.

[85] Sei $H: B' \times I \longrightarrow B',\ (x, t) \mapsto H_t(x)$, die Homotopie, welche die identische Abbildung von B' ($t = 0$) in die konstante Abbildung ($t=1$) mit dem Wert b deformiert. Für jedes $x \in B'$ ist

$$\omega_x := H|_{\{x\}\times I}: I = \{x\}\times I \longrightarrow B' \text{ ein Weg von x nach b.}$$

Insbesondere ist $\omega_{b'}^{-1} \circ \omega_{p(e)}$ ein Weg von p(e) über b nach b', d.h. wir erhalten eine Einbettung

$$j: E \longrightarrow F(g', b'),\ e \mapsto (e, \omega_{b'}^{-1} \circ \omega_{p(e)}, b').$$

Weiter ist $\omega_{b'}^{-1} \circ \omega_{\gamma(1-t)} \circ \gamma_{1-t}$ ein Weg von $\gamma(0)$ über $\gamma(1-t)$ und b nach b', d.h. wir erhalten eine Homotopie

$$\widetilde{H}_t: F(g', b') \longrightarrow F(g', b'),\ (e, \gamma, b') \mapsto (e, \omega_{b'}^{-1} \circ \omega_{\gamma(1-t)} \circ \gamma_{1-t}, b')$$

welche für $t = 0$ homotop zur identischen Abbildung ist und sich für $t = 1$ über die Einbetttung j faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc} F(g',b') & \xrightarrow{\widetilde{H}_1} & F(g',b') \\ & p \searrow \quad \nearrow j & \\ & E & \end{array}$$

mit $p(e,\gamma,b') = e$, d.h. $j \circ p$ ist homotop zur identischen Abbildung. Trivialerweise gilt $p \circ j = Id$. Deshalb sind p und j homotopie-invers.

[86] Die zweite Abbildung ist durch h' und h induziert:

$$F(g',b') \to F(g,h(b')),\ (e', \gamma', b') \mapsto (h'(e'), h\circ\gamma', h(b')).$$

[87] Ist B' der einpunktige Raum so ist das Quadrat (1) nach Definition genau dann homotopie-kartesisch, wenn durch die angegebene natürliche Abbildung E' zur Homotopie-Faser von g homotopie-äquivalent wird.

Ist B' kontrahierbar auf den Punkt $b' \in B'$, so ist die natürlichen Einbettung $\{b'\} \hookrightarrow B'$ eine Homotopie-Äquivalenz. Diese induziert eine Homotopie-Äquivalenz auf den zugehörigen Faserprodukten (weil Homotopien Homotopien induzieren - die Definition des Homotopie-Faserprodukts ist gerade so eingerichtet, daß dies der Fall ist).

eine Homotopie-Äquivalenz ist. Dann ist für jedes Objekt Y von D das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} Y\backslash f & \xrightarrow{j} & C \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ Y\backslash D & \xrightarrow{j'} & D \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} j(X,v) = X \\ f'(X,v) = (fX,v) \\ j'(Y',v) = Y' \end{array}$$

homotopie-kartesisch. Insbesondere besteht für jedes X aus $f^{-1}(Y)$ eine exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_{i+1}(D, Y) \to \pi_i(Y\backslash f, X) \xrightarrow{j_*} \pi_i(C, X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(D, Y) \to \ldots$$

mit $X = (X, id_Y)$.[88]

Bemerkung
Wie im Fall von Theorem A gibt es ein duale Formulierung von Theorem B mit Hilfe der Kategorien f/Y.

2.1.6.5 Folgerung

Sei f: C →D ein Funktor kleiner Kategorien, welcher C zu einer Präfaser-Kategorie (bzw. einer Präkofaser-Kategorie) über D macht. Für jeden Morphismus

$$u: Y \to Y'$$

von D sei das inverse Bild

$$u^*: f^{-1}(Y') \to f^{-1}(Y)$$

(bzw. das dirrekte Bild $u_*: f^{-1}(Y) \to f^{-1}(Y')$) eine Homotopie-Äquivalenz. Dann ist die Kategorie

$$f^{-1}(Y)$$

für jedes Objekt Y von D homotopie-äquivalent zur Homotopie-Faser von f über Y. Genauer: das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Y) & \xrightarrow{i} & C \\ \downarrow & & \downarrow f \\ pt & \xrightarrow{Y} & D \end{array}$$

wobei i der Inklusionsfunktor ist, ist homotopie-kartesisch. Wir haben deshalb für jedes Objekt X von $f^{-1}(Y)$ eine exakte Homotopie-Sequenz

$$\ldots \to \pi_{i+1}(D,Y) \to \pi_i(f^{-1}(Y), X) \xrightarrow{i_*} \pi_i(C,X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(D,Y) \to \ldots$$

---

[88] Der zweite Teil der Aussage folgt aus der ersten: Nach 2.1.6.1 hat man zur stetigen Abbildung

$$Bf: BC \longrightarrow BD$$

die lange exakte Homtopie-Sequenz

$$\ldots \to \pi_{i+1}(D, Y) \to \pi_i(F(Bf,\widetilde{X}), \widetilde{X}) \longrightarrow \pi_i(C, X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(D, Y) \to \ldots$$

mit $\widetilde{X} = (X, \overline{Y})$ und $\overline{Y}$ der konstante Weg in X. Die Kategorie Y\D besitzt ein initiales Objekt, ist also kontrahierbar. Wir könnnen im homotopie-kartesischen Quadrat nach Anwenden des Funktors B den Raum B(Y\D) links unten durch einen einpunktigen Raum ersetzten. Wir sehen so, B(Y\f) ist homotopie-äquivalent zur Homotopie-Faser von Bf, d.h. in der exakten Sequenz können wir F(Bf, $\widetilde{X}$) ersetzen durch Y\f (und $\widetilde{X}$ durch X).

Beweis. Das ist klar[89], denn $f^{-1}(Y) \to Y\backslash f$ ist eine Homotopie-Äquivalenz für prägefasertes f.
QED.
Bemerkung
Zum Beweis von Theorem 1.6.4 brauchen wir ein Lemma, welchem die Theorie der Quasi-Fibrationen [Dold-Lashot] zugrundeliegt. Es ist ein Spezialfall eines allgemeinen Ergebnisses zur Realisierung einer Abbildung simplizialer Räume ist [Segal 2].[90]

2.1.6.6 Definition: Quasi-Faserungen

Eine Quasi-Faserung oder auch Quasi-Fibration ist eine stetige Abbildung $g: E \to B$ topologischer Räume mit der Eigenschaft, daß die natürliche Abbildung

$$g^{-1}(b) \to F(g, b)$$

einen Isomorphismus auf der Homotopie induziert für jeden Punkt $b \in B$.[91]
Bemerkung
(i) Sind die Räume E und B Objekte der Kategorie

$$W$$

der Räume mit dem Homotopie-Typ eines CW-Komplexes, so weiß man auf Grund von [Milnor 2], daß auch F(g,b) in W liegt.

(ii) Ist also $g^{-1}(b)$ in W und ist $g: E \to B$ eine Quasi-Fibration, so ist

$$g^{-1}(b) \to F(g,b)$$

eine Homotopie-Äquivalenz[92], d.h. das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}(b) & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & & \downarrow g \\ pt & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

ist homotopie-kartesisch.

2.1.6.7 Lemma

Seien I eine kleine Kategorie und

$$I \to Top,\ i \mapsto X_i,$$

ein Funktor. Weiter sei

$$g: X_I \to BI$$

der Raum über BI, den man durch Realisieren des simplizialen Raumes

$$NX:[p] \mapsto \oplus_{i_0 \to \ldots \to i_p} X_{i_o} \quad \text{(disjunkte Vereinigung)}$$

erhält.[93]

---

[89] In der Formulierung der Folgerung wurde die kontrahierbare Kategorie Y\D (das Paar (Y, id) ist ein initiales Objekt von Y\D) durch die Kategorie pt mit nur einem Objekt und nur einem Morphismus (dem identischen Morphismus) ersetzt, deren klassifizierender Raum der einpunktige topologische Raum ist.
[90] Die nachfolgenden Beweise berufen sich [Dold-Lashot] bei der Verwendung von Sätzen aus der Theorie der Quasi-Fibrationen. Die zitierten Ergebnisse werden in [Dold-Lashot] allerdings nicht bewiesen: es wird weiterverwiesen aus die Arbeit von Dold und Thom über Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte.
[91] Zur Theorie der Quais-Fibrationen siehe auch den Anhang Topologische Räume/Quasi-Faserungen
[92] Nach dem Satz von Whitehead, vgl. die Anmerkungen von 2.1.4.7

Ist $X_i \to X_j$ eine Homotopie-Äquivalenz für jeden Morphismus $i \to j$ von I, so ist g eine Quasi-Fibration.

Beweis. Bezeichne F_p die Realisierung des p-Skeletts von NI. Dann gilt

$$BI = \bigcup_{p=0}^{\infty} F_p$$

und BI ist als topologischer Raum der direkte Limes[94] der Unterräume F_p. Es reicht deshalb zu zeigen[95], die Einschränkung

$$g^{-1}(F_p) \longrightarrow F_p$$

von g auf F_p ist eine Quasi-Faserung für jedes p.

Für $p = 0$ ist F_p eine diskrete Punkt-Menge. Nun ist aber jede Abbildung $Z \longrightarrow pt$, mit Werten im einpunktigen Raum pt eine Quasi-Faserung (weil $\pi_i(Z,Z,y)$ und $\pi_i(pt, x)$ für beliebige $y \in Z$ und $x \in pt$ trivial[96] sind). Die Einschränkung von g auf F_0 ist also trivialerweise eine Quasi-Faserung.

Betrachten wir die folgenden kommutativen Quadrate von stetigen Abbildungen topologischer Räume.

---

[93] Der Nerv von I ist die simpliziale Menge

$$NC: \Delta^{op} \longrightarrow Ens, [p] \mapsto i_o \longrightarrow \ldots \longrightarrow i_p,$$

deren p-Simplexe die Folgen $i_o \longrightarrow \ldots \longrightarrow i_p$ von je p Morphismen von I sind. Wir können diese simpliziale Menge auch als simplizialen topologischen Raum ansehen (bezüglich der diskreten Topologie). Dann hat man einen Morphismus von simplizialen topologischen Räumen

$$NX \longrightarrow NC$$

der alle Punkte des zu $\sigma = i_o \longrightarrow \ldots \longrightarrow i_p$ gehörigen Raums X_{i_0} in das Simplex σ von NC abbildet. Die induzierte Abbildung

$$g: X_I \longrightarrow BI$$

auf den klassifizierenden Räumen ist für nicht-entartete σ auf dem zu σ gehörigen offenen Unterraum von X_I gerade die Projektion

$$\{\sigma\} \times \dot{\Delta}^p \times X_{i_0} \longrightarrow \{\sigma\} \times \dot{\Delta}^p, (\sigma, u, v) \mapsto (\sigma, u),$$

auf das offene Standard-Simplex.

[94] d.h. ein Teilmenge von BI ist geanu dann offen, wenn ihr Durchschnitt mit F_p offen ist in F_p für jedes p. Man beachte, das erste Trennungsaxiom ist für klassifizierende Räume stets erfüllt.

[95] siehe den Anhang 'Topologische Räume/Quasi-Faserungen/Folgerung 2'.

[96] Nach Definition ist $\pi_n(X, A, x) := \pi_n(P(X, A, x), \gamma_0)$, wobei P(X, A, x) der Raum der Wege von x mit dem Endpunkt in A ist. Im Fall A = X ist dieser Raum kontrahierbar: die Homotopie

$$H_t: P(X, A, x) \longrightarrow P(X, A, x), \gamma \mapsto \gamma_t,$$

mit $\gamma_t(s) := \gamma(st)$ kontrahiert den Raum in den konstanten Weg $\bar{x}$ im Punkt x.

$$\begin{array}{ccc} \vee\, \partial\Delta^p \subset \vee\, \Delta^p & \xleftarrow{\ g\ } & \vee\, X_{i_0} \times \partial\Delta^p \subseteq \vee\, X_{i_0} \times \Delta^p \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ F_{p-1} \subset F_p & & g^{-1}(F_{p-1}) \subset g^{-1}(F_p) \end{array} \qquad (1)$$

Dabei bezeichne $\partial\Delta^p = \dot{\Delta}^p$ den Rand des p-dimensionalen Standard-Simplexes.

Die disjunkten Vereinigungen der oberen Zeilen sollen über alle nicht-entarteten p-Simplexe $i_0 \to \ldots \to i_p$ von NI erstreckt werden.

Die vertikalen Abbildungen sollen die natürlichen Abbildungen sein, wie sie in der Definition der Realisierung vorkommen. Insbesondere werden die beiden rechten vertikalen Abbildungen injektiv, wenn man das Standard-Simplex Δ^p durch dessen inneres ersetzt.

Die beiden Quadrate sind kartesich: der Raum links oben ist gerade das vollständige Urbild des Raums links unten bei der rechten verikalen Abbildung.[97]

Nach Konstruktion bildet g die topologischen Paare, die von den Räumen der unteren Zeilen gebildet werden, ineinander ab.

Sei

$$U \subseteq F_p$$

die offene Teilmenge, die man durch Entfernen der Baryzentren der p-Zellen erhält und sei

$$V := F_p - F_{p-1}\ .$$

Dann gilt

$$F_p = U \bigcup V,$$

und es reicht zu zeigen, die Einschränkungen von g auf U, V und $U \bigcap V$ sind Quasi-Faserungen.[98]

Nun ist g über jedem offenen nicht-entarteten q-Simplex $i_0 \to \ldots \to i_q$ gerade die Projektion

$$X_{i_0} \times \mathring{\Delta}^p \longrightarrow \mathring{\Delta}^p \qquad (2)$$

auf den zweiten Faktor, also trivialerweise eine Quasi-Faserung. Also ist g auf

$$V = F_p - F_{p-1}$$

eine Quasi-Faserung[99], und analog auch auf $U \bigcap V$. Es reicht also, zu zeigen,

---

[97] Das folgt aus der Tatsache, daß die Realisirung gerade die disjunkte Vereinigung der offenen nicht-entarteten Simplexe ist. Damit ist insbesondere F_p gerade die disjunkte Vereinigung aus F_{p-1} und den Bildern der inneren Punkte bei der rechten vertikalen Abbildung des linken Quadrats von (i).
Ein Punkt, dessen Bild bei letzterer Abbildung in F_{p-1} liegt, muß also ein Randpunkt sein, liegt also in der Menge links oben.
Analog argumentiert man mit dem rechten Quadrat (1).

[98] siehe den Anhang ‘Topologische Räume/Quasi-Faserungen/Folgerung 1’.

$$g^{-1}(U) \longrightarrow U$$

ist eine Quasi-Faserung. Nach Induktionsvoraussetzung bezüglich p können wir annehmen, die Einschränkung von g auf F_{p-1} ist eine Quasi-Faserung,

$$g^{-1}(F_{p-1}) \longrightarrow F_{p-1}$$

Bezeichne b das Baryzentrum des p-dimensionalen Standard-Simplex und

$$H_t: \Delta^p - \{b\} \longrightarrow \Delta^p - \{b\},\ 0 \le t \le 1, \qquad (3)$$

die Homotopie, welche die identische Abbildung (t = 0) in die Projektion

$$\Delta^p - \{b\} \longrightarrow \partial\Delta^p$$

mit dem Zentrum b (t = 1) deformiert.[100] Man beachte, die Einschränkung von H_t auf den Rand des Standard-Simplex ist für jedes t die identischen Abbildung. Wir können deshalb die identische Abbildung von F_{p-1} fortsetzen zu einer Homotopie

$$H_t: U \longrightarrow U,$$

indem wir F_p in der Gestalt

$$F_p = F_{p-1} \bigcup \left(\bigcup_{\sigma \in NI_p} \Delta_{p,\sigma} \right)$$

schreiben und die Abbildung (3) auf jeden Punkt der Standard-Simplexe rechts anwenden, die keine Baryzentren sind. Wir erhalten so eine Homotopie von Paaren

$$H_t: (U, F_{p-1}) \longrightarrow (U, F_{p-1})$$

welche die identische Abbildung von U in eine Retraktion $U \longrightarrow F_{p-1}$ deformiert und für jedes t auf F_{p-1} die identische Abbildung induziert.

Analog können wir

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(F_{p-1}) \bigcup \left(\bigcup_{\sigma \in NI_p} X_{i_0(\sigma)} \times \Delta_{p,\sigma} \right)$$

---

[99] V ist disjunkte Vereinigung von offenen p-dimensionalen Standard-Simplexen. Über jeder dieser Komponenten ist g Quasi-Faserung, also auch über jeder endlichen Vereinigung dieser Komponten, also auch über dem direkten Limes aller dieser endlichen Vereinigungen.

[100] Bezeichne

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \le 1\},\ S = \{ x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = 1\},$$

die p-dimensionale Einheitskugel bzw. die (p-1)-dimensionalen Einheitssphäre mit dem Zentrum im Ursprung und G_t die stetige Abbildung

$$G_t: B - \{0\} \longrightarrow B-\{0\},\ x \mapsto (1-t+\frac{t}{\|x\|})\bullet x,\ 0 \le t \le 1.$$

Für t = 0 ist H_t die identische Abbildung und für t = 1 die Projektion aus dem Ursprung auf die Einheitssphäre S. Das p-dimensionale Standard-Simplex Δ^p kann man als Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ ansehen und so positionieren, daß das Baryzentrum sich gerade im Ursprung befindet. Die Projektion aus dem Ursprung gestattet es dann S homöomorp auf den Rand des Standard-Simplex abzubilden und diesen Homöomorphismus zu einem Homöomorphismus von Paaren

$$(B - 0, S) \xrightarrow{\cong} (\Delta^p - b, \partial\Delta^p)$$

fortzusetzen. Die Homotopie H_t entsteht dann aus G_t durch Zusammensetzen mit diesem Homöomorphismus (und dessen Inversen).

schreiben und id × H_t auf die Punkte der direkten Produkte rechts anwenden. Wir erhalten so eine Homotopie

$$H_t: (g^{-1}(U), g^{-1}(F_{p-1})) \longrightarrow (g^{-1}(U), g^{-1}(F_{p-1}))$$

von Paaren, welche die identische Abbildung in eine Retration $g^{-1}(U) \longrightarrow g^{-1}(F_{p-1})$ deformiert und für jedes t auf $g^{-1}(F_{p-1})$ die identische Abbildung induziert.

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm stegiger Abbildungen von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}(U) & \overset{H_1}{\twoheadrightarrow} & g^{-1}(F_{p-1}) \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ U & \overset{H_1}{\twoheadrightarrow} & F_{p-1} \end{array}$$

dessen horizontale Abbildungen Homotopie-Äquivalenzen sind. Betrachten wir das zugehörige Diagramm der Homotopie-Gruppen.

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(g^{-1}(U),g^{-1}(x),y) & \overset{H_1}{\longrightarrow} & \pi_i(g^{-1}(F_{p-1}),g^{-1}(x'),y') \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ \pi_i(U,x) & \overset{H_1}{\longrightarrow} & \pi_i(F_{p-1};x') \end{array}$$

für beliebiges $x \in U$ und $y \in g^{-1}(x)$ mit $x' := H_1(x)$, $y' := H_1(y)$. Die untere horizontale Abbildung ist ein Isomorphismus, weil $H_1: U \longrightarrow F_{p-1}$ eine Homotopie-Äquivalenz ist und die Homotopie-Gruppe nicht vom Basispunkt abhängt (sondern nur von dessen linearer Komponente). Die rechte vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus, weil die Einschränkung von g auf F_{p-1} (nach Induktionsvoraussetzung) eine Quasi-Faserung ist.

Wir haben zu zeigen, die linke vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus. Dazu reicht es zu zeigen, die obere horizontale Abbildung ist bijektiv. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir die exakten Homotopie-Sequenzen der Paare

$$(g^{-1}(U), g^{-1}(x)) \text{ und } (g^{-1}(F_{p-1}), g^{-1}(x'))$$

und den Morphismus, den H_1 zwischen diesen Sequenzen induziert.

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots\longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(x),y) & \longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(U),y) & \longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(U),g^{-1}(x),y) & \longrightarrow \ldots \\ & \downarrow H_1 & & \cong\downarrow H_1 & & \downarrow H_1 & \\ \ldots\longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(x'),y') & \longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(F_{p-1}),y') & \longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(F_{p-1}),g^{-1}(x'),y') & \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Es reicht zu zeigen, die rechte vertikale Abbildung ist bijektiv. Weil die Zeilen exakt sind, reicht es auf Grund des Fünfer-Lemmas zu zeigen, die linke vertikale Abbildung ist bijektiv, d.h. die durch H_1 induzierte Abbildung

$$H_1: g^{-1}(x) \longrightarrow g^{-1}(x') \qquad (4)$$

definiert einen Isomorphismus auf den Homotopie-Gruppen. Im Fall $x \in F_{p-1}$ ist x' = x und (4) die identische Abbildung, d.h. die Behauptung ist trivial. Sei also

$$x \notin F_{p-1}.$$

Sei x ein innerer Punkt der Kopie von Δ^p, welche dem Simplex

$$s = (i_0 \to ... \to i_p) \qquad (5)$$

entspricht. Die Abbildung H_1 überführe x in einen inneren Punkt der nicht-entarteten Seite $i_{\nu_0} \longrightarrow ... \longrightarrow i_{\nu_q}$ von s. Dann gilt (vgl. (2))

$$g^{-1}(x) = X_{i_0} \text{ und } g^{-1}(x') = X_{i_{\nu_0}}$$

und (4) ist die stetige Abbildung $X(i_0 \longrightarrow i_{\nu_0})$ zur Zusammensetzung $i_0 \longrightarrow i_{\nu_0}$ der ersten ν_0 Morphismen von s. Diese ist nach Voraussetzung eine Homotopie-Äquivalenz, d.h. (4) induziert tatsächlich Isomorphismen auf den Homotopie-Gruppen.
QED.

2.1.6.8 Beweis von Theorem A

Behauptung:
Sei

$$f: C \to D$$

ein Funktor kleiner Kategorien. Ist die Kategorie

$$Y\backslash f$$

kontrahierbar für jedes Objekt Y von D, so ist der Funktor f eine Homotopie-Äquivalenz.

Bezeichne

$$S(f)$$

die Kategorie, deren Objekte die Tripel

$$(X, Y, v)$$

sind mit X∈C, Y∈D und einem Morphismus v: Y → fX in D. Die Morphismen

$$(X,Y,v) \to (X',Y',v')$$

dieser Kategorie seien die Paare $(X \xrightarrow{u} X', Y' \xrightarrow{w} Y)$ mit der Eigenschaft, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{w} & Y' \\ v\downarrow & & \downarrow v' \\ fX & \xrightarrow{fu} & fX' \end{array} .$$

Mit anderen Worten, S(f) ist die Kofaser-Kategorie über $C \times D^{op}$, die durch den Funktor

$$C \times D^{op} \to Ens, (X,Y) \to Hom(Y,fX)$$

definiert ist.[101]

---

[101] Das vollständige Urbild von (X,Y) bei der natürlichen Projektion

Wir haben Funktoren

$$D^{op} \xleftarrow{p_2} S(f) \xrightarrow{p_1} C$$

mit $p_1(X,Y,v) = X$ und $p_2(X,Y,v) = Y$. Sei

$$T(f): Ord^{op} \times Ord^{op} \to Ens, (\mathbf{p},\mathbf{q}) \mapsto T_{pq}(f),$$

die bisimpliziale Menge mit der Eigenschaft, daß die Elemente von

$$T_{pq}(f)$$

gerade die Paare

$$(Y_p \to Y_{p-1} \to ... \to Y_0 \to fX_0 , X_0 \to X_1 \to ... \to X_q)$$

von Diagrammen in D bzw. C sind. Die i-te Seite eines solchen Paares in der p- bzw. q-Richtung erhalte man durch Weglassen von Y_i bzw. X_i in der offensichtlichen Weise. Durch Weglassen der ersten Koordinate erhält man eine Abbildung bisimplizialer Mengen

$$(*) \qquad T(f)_{pq} \to NC_q$$

wobei der Funktor rechts konstant sein soll in der p-Richtung.
Die diagonale simpliziale Menge zu T(f) is gerade der Nerv der Kategorie S(f). Die Realisierung von (*) ist deshalb gerade die Abbildung

$$Bp_1: BS(f) \to BC.$$

Unter der Realisierung einer bisimplizialen Menge verstehen wir den im obigen Lemma 2.1.5.10 beschriebenen Raum, wobei die bisimpliziale Menge in der offensichtlichen Weise als bisimplizialer Raum betrachtet wird.
Andererseits können wir (*) bezüglich p realisieren und erhalten eine Abbildung simplizialer Räume

$$\vee_{X_0 \to ... \to X_q} B(D/fX_0)^{op} \to \vee_{X_0 \to ... \to X_q} pt = NC_q$$

Dies ist eine Homotopie-Äquivalenz für jedes q, denn die Kategorie D/fX_0 hat ein finales Objekt. Wir wenden Lemma 2.1.6.7 an und erhalten, daß die Realisierung von (*) eine Homotopie-Äquivalenz ist.[102]

Analog gibt es eine Abbildung bisimplizialer Mengen

$$T(f)_{pq} \to N(D^{op})_p,$$

deren Realisierung gerade die Abbildung

$$Bp_2: BS(f) \to B(D^{op})$$

ist. Durch Realisierung bezüglich q erhalten wir eine Abbildung simplizialer Räume

$$(**) \qquad £_{Y_0 \leftarrow ... \leftarrow Y_p} B(Y_0 \backslash f) \to £_{Y_0 \leftarrow ... \leftarrow Y_p} pt = N(D^0)_p$$

welche eine Homotopie-Äquivalenz ist für jedes p, denn die Kategorien Y\f sind kontrahierbar nach Voraussetzung. Also ist der Funktor p_2 eine Homotopie-Äquivalenz.

$$S(f) \longrightarrow C \times D^{op}, (X, Y, v) \mapsto (X,Y),$$

ist gerade Hom(Y, fX).

[102] Nach dem Lemma erhält man zunächst nur eine Quasi-Faserung. Die Homotopie der Fasern ist aber trivial. Auf Grund der exakten Homotopie-Sequenz induziert $Bp_1: BS(f) \longrightarrow BD^{op}$ Isomorphisemen auf den Homotopie-Gruppen, ist also eine schwache Homotopie-Äquivalenz. Die beteiligten Räume sind aber Zellkomplexe. Nach dem Satz von Whitehead ist Bp_1 eine Homotopie-Äquivalenz.

Betrachten wir nun das folgende kommutative Diagramm von kleinen Kategorien.

$$\begin{array}{ccccc} D^0 & \xleftarrow{p_2} & S(f) & \xrightarrow{p_1} & C \\ \| & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ D^0 & \xleftarrow{p_2} & S(id_D) & \xrightarrow{p_1} & D \end{array}$$

mit f'(X,Y,v) = (fX,Y,v). Die horizontalen Pfeile bezeichen wie gerade bewiesen Homotopie-Äquivalenzen. Man beachte $Y\backslash id_D = Y\backslash D$ ist kontrahierbar, da es eine initiales Objekt gibt. Damit ist aber auch f eine Homotopie-Äquivalenz.

2.1.6.9 Beweis von Theorem B

Der Funktor

$$p_1 : S(f) \to C$$

ist eine Homotopie-Äquivalenz wie bisher, nicht jedoch der Funktor p_2. Die Abbildung

$$Bp_2 : BS(f) \to B(D^0)$$

ist die Realisierungsabbildung (**) von 2.1.5.11 . Durch Anwenden von Lemma 2.1.6.7 auf den Funktor

$$D^0 \to \mathrm{Top},\ Y \mapsto B(Y\backslash f),$$

sehen wir, Bp_2 ist eine Quasi-Fibration, d.h. das kartesiche Quadrat

$$\begin{array}{ccc} Y\backslash f & \to & S(f) \\ \downarrow & & \downarrow p_2 \\ pt & \xrightarrow{Y} & D^0 \end{array}$$

ist homotopie-kartesisch. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y\backslash f & \to & S(f) & \xrightarrow{\sim} & C \\ \downarrow & (1) & \downarrow f' & (2) & \downarrow f \\ Y\backslash D & \to & S(id_D) & \xrightarrow{\sim} & D \\ \sim\downarrow & (3) & \downarrow\sim & & \\ pt & \xrightarrow{Y} & D^0 & & \end{array}$$

dessen Quadrate kartesisch sind, wobei das Symbol '$\sim$' Homotopie-Äquivalenz bedeute. Da das Quadrat (1)+(3) homotopie-kartesisch ist, muß auch das Quadrat (1) homotopie-kartesisch sein, also auch das Quadrat (1)+(2), d.h. es gilt die Behauptung. **QED**.

2.2. Die K-Gruppen einer exakten Kategorie 15

2.2.1 Exakte Kategorien 15

2.2.1.1 Die Klasse E

Seien **A** eine abelsche Kategorie und

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{A}$$

eine volle Teilkategorie, welche additiv ist. Wir nehmen an, **M** ist abgeschlossen gegenüber Erweiterungen in **A** in dem Sinne, daß für jede exakte Sequenz

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

in **A** mit der Eigenschaft, daß A' und A'' isomorph sind zu Objekten von **M**, auch das Objekt A zu einem Objekt von **M** isomorph ist. Bezeichne

$$\mathbf{E}$$

die Klasse der Sequenzen

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0, \qquad (1)$$

in **M**,welche exakt sind in **A**. Ein Morphismus von **M** heiße zulässiger Monomorphismus, wenn er als Morphismus i einer Sequenz (1) von E vorkommt. Wir schreiben dann auch

$$M' \rightarrowtail M$$

anstelle von $M' \to M$.

Ein Morphismus von **M** heiße zulässiger Epimorphismus, wenn er als Morphismus j einer Sequenz (1) von E vorkommt. Wir schreiben dann auch

$$M \twoheadrightarrow M''$$

anstelle von $M \to M$.

2.2.1.2 Eigenschatten der Klasse E

Seien **M**, **A** und **E** wie in 2.2.1.1. Dann hat E die folgenden Eigenschaften.

(a) Jede Sequenz in **M**, die in **A** isomorph ist zu einer Sequenz von **E**, liegt selbst schon in **E**. Für je zwei Objekte M', M'' von **M** liegt die Sequenz

$$0 \to M' \xrightarrow{(id,0)} M' \oplus M'' \xrightarrow{pr_2} M'' \to 0 \qquad (2)$$

in **E**. Für jede Sequenz

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0,$$

von **E** gilt in der additiven Kategorie **M**,

$$i = \mathrm{Ker}\, j \text{ und } j = \mathrm{Koker}\, i.$$

b) Die Klasse der zulässigen Epimorphismen ist abgeschlossen gegenüber Komposition und gegenüber Basiswechsel mit beliebigen Morphismen aus M.
Dual: die Klasse der zulässigen Monomorphismen ist abgeschlossen gegenüber Komposition und gegenüber Ko-Basis-Wechsel mit beliebigen Morphismen aus M.

c) Sei $M \to M''$ ein Morphismus in **M**, welcher in **M** einen Kern besitzt[103]. Es gebe einen Morphismus

$$N \to M$$

in **M** mit der Eigenschaft, daß die Komposition

$$N \to M \to M''$$

ein zulässiger Epimorphismus ist. Dann ist auch $M \to M''$ ein zulässiger Epimorphismus.

---

[103] d.h. der in A gebildete Kern ist isomorph zu einem Objekt von M.

Dual: Sei M' → M ein Morphismus in M, welcher in M einen Kokern besitzt. Es gebe einen Morphismus

$$M \to N$$

in M mit der Eigenschaft, daß die Komposition

$$M' \to M \to N$$

ein zulässiger Monomorphismus ist. Dann ist auch M' → M ein zulässiger Monomorphismus.

Beweis. siehe Anhang 'Kategorien/exakte Kategorien/Beispiel'
QED

2.2.1.3 Definition: exakte Kategorie

Eine exakte Kategorie ist eine additive Kategorie M zusammen mit einer Familie

$$E = E(M)$$

von Sequenzen

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0,$$

welche die (kurzen) exakten Sequenzen von M genannt werden, so daß die Bedingungen a), b) und c) von 2.2.1.2 erfüllt sind.[104] Ein exakter Funktor zwischen exakten Kategorien ist ein additiver Funktor

$$F: M \to M'$$

zwischen exakten Kategorien M und M', welcher die exakten Sequenzen von M in exakte Sequenzen von M' überführt.

2.2.1.4 Beispiel: abelsche Kategorien

Jede abelsche Kategorie ist eine exakte Kategorie in der offensichtlichen Weise (d.h. die Elemente von E sind die exakten Sequenzen im gewöhnlichen Sinne).

2.2.1.5 Beispiel: additivie Kategorien mit den zerfallenden Sequenzen

Jede additive Kategorie kann in eine exakte verwandelt werden, indem man in E alle zerfallenden kurzen exakten Sequenzen aufnimmt.

2.2.1.6 Beispiel: abelsche Kategorien im Sinne von Heller

Eine Kategorie, welche 'abelsch' ist im Sinne von [Heller] ist eine exakte Kategorie, welche Karoubisch ist (d.h. jeder Projektor besitzt ein Bild) und umgekehrt.

2.2.1.7 Die Einbettung einer exakten Kategorie in eine abelsche

Sei **M** eine exakte Kategorie. Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{A} := \{ F \in \mathrm{Funct}(M^0, \mathbf{Ab}) \mid F \text{ additiv und linksexakt} \}$$

die additive Kategorie der additiven kontravarianten Funktoren **M**→Ab mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen, welche linksexakt sind, d.h. jede kurze exakte Sequenz

---

[104] siehe den Anahng 'Kategorien/Exakte Kategorien'

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

von **M** in eine exakte Sequenz

$$0 \to F(M'') \to F(M) \to F(M')$$

von **Ab** überführen. (Genauer: man wähle ein Universum, welches **M** enthält und definiere **A** als die Kategorie der linksexakten Funktoren, deren Werte abelsche Gruppen aus diesem Universum sind).

Bemerkung

Unter Verwendung wohlbekannter Konstruktionen (siehe zum Beispiel [Gabriel]) kann man zeigen, **A** ist eine abelsche Kategorie, der Yoneda-Funktor h bettet **M** als volle Teilkategorie in **A** ein, welche abgeschlossen ist unter Erweiterungen. Eine Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

von **M** ist dabei genau dann in E(**M**), wenn h sie in eine exakte Sequenz von **A** überführt. Wir lassen die Einzelheiten weg, da sie nicht wirklich wichtig sind für das folgende.

2.2.2 Die Kategorie Q**M** 16

2.2.2.1 Definition

Sei **M** eine exakte Kategorie. Dann bezeichne

Q**M**

die folgende Kategorie. Die Objekte von Q**M** sind dieselben wie die von **M**,

$$|Q\mathbf{M}| := \mathbf{M}.$$

Für je zwei Objekte M und M' von **M** ist ein Morphismus in Q**M** von M nach M' eine Isomorphie-Klasse von Diagrammen

$$M \overset{j}{\twoheadleftarrow} N \overset{i}{\rightarrowtail} M' \tag{3}$$

in **M** mit einem zulässigen Epimorphismus j und einem zulässigen Monomorphismus i. Dabei betrachten wir Isomorphismen von Diagrammen, welche die Identität auf M und M' induzieren. Man beachte, ein solcher Isomorphismus ist eindeutig bestimmt, falls er existiert.

Wir haben noch die Morphismen-Komposition in Q**M** zu definieren. Dazu sei ein zweiter Morphismus

$$M' \overset{j'}{\twoheadleftarrow} N' \overset{i'}{\rightarrowtail} M'' \tag{4}$$

von Q**M** gegeben. Die Komposition der Morphismen (3) und (4) von Q**M** ist dann durch die Morphismen $j \circ pr_1$ und $i' \circ pr_2$ im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N \times_M N' & \overset{pr_2}{\rightarrowtail} & N' & \overset{i'}{\rightarrowtail} & M'' \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow\!\!\downarrow & & \downarrow\!\!\downarrow{\scriptstyle j'} & & \\ N & \overset{i}{\rightarrowtail} & M' & & \\ {\scriptstyle j}\downarrow\!\!\downarrow & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

gegeben.

Man beachte, pr_1 entsteht durch Basiswechsel (mit i) aus der Deflation j', ist also eine Deflation. Wir haben noch zu zeigen, daß pr_2 eine Inflation ist (dann ist $j \circ pr_1$ als Zusammensetzung von Deflationen eine Deflation und $i' \circ pr_2$ als Zusammensetzung von Inflationen eine Inflation, d.h. das Paar der beiden angegebenen Morphismen definiert einen Morphismus in Q**M**). Zum Beweis fügen wir die zur Inflation i gehörige Deflation

$$M' \overset{d}{\twoheadrightarrow} \overline{M}'.$$

in das obige Diagramm ein:

$$\begin{array}{ccccc} N\times_{M'}N' & \overset{pr_2}{\rightarrowtail} & N' & \overset{i'}{\rightarrowtail} & M' \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} & & \\ N & \overset{i}{\rightarrowtail} & M' & \overset{d}{\twoheadrightarrow} & \overline{M}' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

Es reicht zu zeigen, pr_2 ist der Kern der Deflation dj',

$$pr_2 = \mathrm{Ker}(dj').$$

Es gilt

$$d \circ j' \circ pr_2 = d \circ i \circ pr_1 = 0 \circ pr_1 = 0.$$

Sei α': $X \longrightarrow N'$ irgendein Morphismus mit $d \circ j' \circ \alpha = 0$. Wir haben zu zeigen, α faktorisiert sich eindeutig über pr_2. Weil i der Kern von d ist, faktorisiert sichn $j' \circ \alpha$ eindeutig über i,

$$j' \circ \alpha \colon X \overset{\widetilde{\alpha}}{\longrightarrow} N \overset{i}{\longrightarrow} M',$$

d.h. es gibt genau ein $\widetilde{\alpha}$ mit $i \circ \widetilde{\alpha} = j' \circ \alpha$. Weil das linke obere Viereck des Diagramms kartesisch ist, gibt es auf Grund der letzten Identität genau einen Morphismus

$$\widetilde{\alpha}' \colon X \longrightarrow N\times_{M'}N'$$

mit

$$pr_2 \circ \widetilde{\alpha}' = \alpha \text{ und } pr_1 \circ \widetilde{\alpha}' = \widetilde{\alpha}.$$

Wir haben gezeigt, α faktorisiert sich über pr_2. Diese Faktorisierung ist eindeutig, weil pr_2 durch Basiswechsel aus einem Monomorphismus (nämlich i) entsteht, also ein Monomorphismus ist.

Eine Kategorie der Gestalt Q**M** mit einer exakten Kategorie **M** heißt Subquotienten-Kategorie.

Bemerkungen

(i) Die Komposition ist wohldefiniert und assoziativ. Die Kategorie Q**M** ist somit wohldefiniert, vorausgesetzt, die Klasse der Diagramme (3) ist eine Menge, d.h. jedes Objekt von **M** hat eine Menge von Teilobjekten.

(ii) Es wird sich als nützlich erweisen, die obige Konstruktion mit Hilfe von Teil-. und Quotienten-Objekten zu beschreiben (siehe Abschnitt 2.2.3).

2.2.2.2 Vereinbarung

Für jedes Objekt jeder hier betrachteten exakten Kategorie existiere eine Menge von Teilobjekten.

2.2.2.3 Zulässige Schichten (layers)

Seien **M** eine exakte Kategorie umd M ein Objekt von **M**. Ein zulässiges Teilobjekt von M ist eine Isomorphie-Klasse von zulässigen Monomorphismen $M' \rightarrowtail M$ über M[105]. Zulässige Quotienten werden in analoger Weise definiert.[106]

Bemerkungen

(i) Zulässige Teilobjekte von **M** sind in 1-1-Korrespondenz mit den zulässigen Quotienten.[107]

(ii) Die zulässigen Teilobjekte von **M** bilden eine halbgeordnete Menge bezüglich der Halbordnung mit

$$M_1 \leq M_2 ,$$

falls der (eindeutig bestimmte) Morphismus $M_1 \rightarrow M_2$ über M existiert und ein zulässiger Monomorphismus ist. In dieser Situation nennen wir (M_1, M_2) eine zulässige Schicht von M und den Kokern M_2/M_1 zulässiger Subquotient von M.

(iii) Ein Morphismus $M \rightarrow M'$ der Kategorie Q**M** ist mit dieser Terminologie gerade ein Paar

$$((M_1, M_2), \theta)$$

bestehend aus einer zulässgien Schicht (M_1, M_2) in M' und einem Isomorphismus

$$M \xrightarrow[\cong]{\theta} M_2/M_1 \ (\twoheadleftarrow M_2 \rightarrowtail M')$$

Die Komposition ist die offensichtliche Weise, einen Isomoprhismus von M mit einem zulässigen Subquotienten von M' und einen Isomorphismus von M' mit einem zulässigen Subquotienten von M" zu kombinieren.[108]

(iv) Morphismen der Gestalt $0 \rightarrow M$ in Q**M** sind in 1-1-Korrespondenz zu den zulässigen Teilobjekten von M.[109]

---

[105] d.h. eine Isomorphie-Klasse der Kategorie **M**/M der Objekte von **M** über M.

[106] d.h. ein zulässiger Quotient von M∈**M** ist eine Isomorphie-Klasse von zulässigen Epimorphismen $M \twoheadrightarrow M"$ unter M.

[107] Der Übergang zum Kokern überführt zulässige Teilobjekte in zulässige Quotienten. Der Übergang zum Kern induziert die Umkehrabbildung.

[108] Die natürlichen Einbettungen der Teilobjekte setzt man zusammen mit mit den auftretenden Inflationen (und erhält so wieder Infaltionen) und nimmt vollständige Urbilder (d.h. Faserprodukte) entlang der auftretenden Deflationen):

$$M \xrightarrow{\cong} M_2/M_1 \twoheadleftarrow M_2 \rightarrowtail M' \xrightarrow{\cong} M'_2/M'_1 \twoheadleftarrow M'_2 \rightarrowtail M"$$

$$\updownarrow$$

$$M_1$$

[109] d.h. im zugehörigen Paar $((M_1, M_2), \theta)$ kann man $M_1 = M_2$ wählen.

(v) Ein Isomorphismus von M nach M' ist Q**M** ist dasselbe wie ein Isomorphismus von M nach M' in M.[110]

2.2.4 Surjektive und injektive Morphismen in QM

Sei **M** eine exakte Kategorie. Jeder zulässige Monomorphismus

$$i: M \rightarrowtail M'$$

in M definiert einen Morphismus

$$i_!: M \to M'$$

in Q**M**.[111] Morphismen dieser Gestalt in QM heißen injektiv. Jeder zulässige Epimorphismus

$$j: M'' \twoheadrightarrow M'$$

in M definiert einen Morphismus

$$j^!: M' \to M''$$

in QM.[112] Morphismen dieser Gestalt in QM heißen surjektiv.

Bemerkungen

(i) Nach Definition besitzt jeder Morphismus u von QM eine Faktorisierung

$$u = i_! j^!,$$

und diese Faktorisierung ist eindeutig bis auf Isomorphie.[113]

---

[110] Der von den Morphismen $i' \circ pr_2$ und $j \circ pr_1$ im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N \times_{M'} N' & \xrightarrow{pr_2} & N' & \xrightarrow{i'} & M'' \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} & & \\ N & \xrightarrow{i} & M' & & \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

gebildetete Morphismus von Q**M** ist dann als Diagramm isomorph zu $M \xleftarrow{id} M \xrightarrow{id} M$, d.h. $i' \circ pr_2$ und $j \circ pr_1$ sind Isomorphismen. Die Inflation i' ist ein Epimorphismus, d.h. der Kern ist 0, d.h. i' ist ein Isomorphismus. Nach demselben Argument ist auch pr_2 ein Isomorphismus.

Die duale Argumentation zeigt pr_1 und j sind ebenfalls Isomorphismen.

Weil pr_1 und pr_2 Isomorphismen sind, unterscheiden sich i und j' nur um einen Isomorphismus, d.h. i ist auch eine Deflation und j' eine Inflation, d.h. beide sind Isomorphismen. Die Paare (i,j) uud (i', j') stimmen bis auf Isomorphie mit $M \xleftarrow{id} M \xrightarrow{id} M$ überein.

[111] dargestellt durch

$$M \xleftarrow{j} N \xrightarrow{i} M'$$

mit N = M und j = id.

[112] dargestellt durch

$$M'' \xleftarrow{j} N \xrightarrow{i} M'$$

mit N = M' und i = id.

[113] Sind $i: M' \rightarrowtail M''$ und $j: M'' \twoheadrightarrow M$ wie oben, so sind $j^!$ und $i_!$ gerade durch die Diagramme

(ii) Seien

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ M & \xrightarrow{i'} & N' \end{array} \qquad (5)$$

ein bikartesiches Quadrat und u: M → M' der durch

$$M \xleftarrow{j} N \xrightarrow{i} M'$$

gegebene Morphismus von QM. Dann gilt

$$u = j' {}^{!}i'_{!}$$

und diese Zerlegung von u in einen injektiven Morphismus gefolgt durch einen surjektiven ist ebenfalls eindeutig bis auf Isomorphie.

(iii) Ein Morphismus von Q**M**, der sowohl surjektiv als auch injektiv ist, ist ein Isomorphismus, und er ist von der Gestalt

$$\theta_{!}^{!} = (\theta^{-1})^{!}$$

mit einem Isomorphismus θ von M.

(iv) Injektive und surjektive Morphismen in QM sollten nicht mit Monomorphismen und Epimorphismen in kategorialem Sinne verwechselt werden.

(v) Jeder Morphismus in Q**M** ist ein Monomorphismus, denn die Kategorie

Q**M**/**M**)

ist äquivalent zur halbgeordneten Mengen der zulässigen Schichten in **M** bezüglich der Halbordnung

$$(M_0, M_1) \leq (M'_0, M'_1) \qquad \Leftrightarrow M'_0 \leq M_0 \leq M_1 \leq M'_1.$$

(vi) Wir verwenden jetzt die Operationen $i \mapsto i_{!}^{!}$ und $j \mapsto j_{!}^{!}$ zur Charakterisierung der Kategorie Q**M** durch eine Universalitätseigenschaft.

2.2.5 Eine Universalitätseigenschaft von QM

$$M \xleftarrow{j} M' \xrightarrow{id} M' \text{ und } M' \xleftarrow{id} M' \xrightarrow{i} M''$$

gegeben, d.h. die Kompostion $i_{!}^{!} j^{!}$ ist gegeben durch die beiden Kompositionen links und oben im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M' \times_{M'} M' & \xrightarrow{pr_2} & M' & \xrightarrow{i} & M'' \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ M' & \xrightarrow{id} & M' & & \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

d.h. durch

$$M \xleftarrow{j} M \times_{M'} M'' \xrightarrow{i} M''.$$

Insbesondere sehen wir, durch den Morphismus u sind i und j bis auf Isomorphie festgelegt

Sei **M** eine exakte Kategorie. Dann gilt:

(i) a) Für je zwei verknüpfbare zulässige Monomorphismen i und i' ist

$$(i'i)_! = i'_! i_! \text{ und } id_! = id$$

Dual ist für je zwei verknüpfbare zulässige Epimorphismen j und j'

$$(jj')^! = j'^! j^! \text{ und } id^! = id.$$

b) Für jedes bikartesiche Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ M & \xrightarrow{i'} & N' \end{array}$$

dessen horizontale Morphismen zulässige Monomorphismen und dessen vertikale Morphismen zulässige Epimorphismen sind, gilt

$$i_! j^! = j'^! i'_!.$$

(ii) Seien C eine Kategorie und

$$h: |M| \to C, M \mapsto hM$$

$$i_!: \{f \in Mor(M) | f \text{ zulässiger Monomorphismus}\} \to Mor\, C, M \xrightarrow{i} M' \mapsto hM \xrightarrow{i_!} hM'$$

$$i_!: \{f \in Mor(M) | f \text{ zulässiger Epimorphismus}\} \to Mor\, C, M \xrightarrow{j} M' \mapsto hM' \xrightarrow{j^!} hM$$

Abbildungen auf der Menge der Objekte von M, auf der Menge der zulässigen Monomorphismen bzw. der Menge der zulässigen Epimorphismen,wobei die Identitäten von (i) bestehen sollen. Dann gibt es genau einen Funktor

$$QM \to C,$$

der mit den Operationen $i \mapsto i_!$ und $j \mapsto j^!$ in den beiden Kategorien verträglich ist.

Bemerkungen

(i) Insbesondere induziert ein exakter Funktor F: **M** → **M**' zwischen exakten Kategorien einen Funktor

$$QF : Q\mathbf{M} \to Q\mathbf{M}'$$

mit

$$M \mapsto FM, i_! \mapsto F(i)_!, j^! \mapsto F(j)^!.$$

(ii) Bezeichnet $\mathbf{M}^0$ die duale Kategorie, so besteht ein Isomorphismus

$$Q(\mathbf{M}^{op}) \cong Q(\mathbf{M})^{op}, \tag{5}$$

welcher injektive und surjektive Morphismen vertauscht.

(iii) Als nächstes wollen wir die fundamentale Gruppe des klassifizierenden Raums B(Q(M)) mit der Grothendieck-Gruppe vergleichen. Deshalb erinnerm wir an die Definition der letzteren.

(iv) Die Grothendieck-Gruppe einer (kleinen) exakten Kategorie **M** ist nach Definition die abelsche Gruppe mit einem Erzeuger

$$[M]$$

für jedes Objekt M von **M** und einer Relation

$$[M] = [M'] \bullet [M'']$$

für jede exakte Sequenz[114]

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{6}$$

in **M**. Die Gruppe kann genauso als die nicht-notwendig abelsche Gruppe mit denselben Erzeugern und Relationen definieren, denn die Relation

---

[114] d.h. jede Konflation von **M**.

$$[M' \oplus M''] = [M'] \bullet [M'']$$

sorgt automatisch dafür, daß die Gruppe abelsch wird.

(v) Aus der Definition der Grothendieck-Gruppe ergibt sich unmittelbar, daß die natürlichen Abbildung

$$\varphi : |\mathbf{M}| \longrightarrow K_0(\mathbf{M}),\ M \mapsto [M],$$

additiv ist: für je drei Objekte M, M', M", die in einer exakten Sequenz der Gestalt (6) vorkommen, gilt

$$\varphi(M) = \varphi(M') \bullet \varphi(M'').$$

Außerdem ist φ sogar universell bezüglich dieser Eigenschaft, d.h. jede additive Abbildung

$$f : |M| \longrightarrow G$$

mit Werten in einer Gruppe G faktorisiert sich eindeutig über φ.

Beweis der Universalität von φ. Sei F(**M**) die freie Gruppe, die von den Objekten von **M** erzeugt wird. Dann läßt sich f auf genau eine Weise zu einem Gruppen-Homomorphismus

$$\tilde{f} : F(\mathbf{M}) \longrightarrow G,\ M \mapsto f(M),$$

fortsetzen. Weil f additiv ist, gilt für je drei Objekte M, M', M", die in einer exakten Sequenz der Gestalt (6) vorkommen

$$\tilde{f}(M/M' \bullet M'') = \tilde{f}(M)/\tilde{f}(M') \bullet \tilde{f}(M'') = f(M)/f(M') \bullet f(M'') = 1,$$

d.h. $\tilde{f}$ faktorisiert sich eindeutig über den Faktor $K_0(\mathbf{M})$ von F(**M**), modulo dem Normalteiler, der von den Relationen M = M'•M" erzeugt wird.
QED.

2.2.3 Die fundamentale Gruppe von QM: Theorem 1 [18]

Seien **M** eine kleine exakte Kategorie, so daß der klassifizierende Raum B(Q**M**) definiert ist, und

$$0 \in \mathbf{M}$$

ein Nullobjekt von **M**. Dann ist die fundamentale Gruppe

$$\pi_1(B(Q\mathbf{M}), 0)$$

kanonisch isomorph zur Grothendieck-Gruppe $K_0\mathbf{M}$.

Beweis. Zum Beweis erinnern wir zunächst an die Formulierung und einige Argumente des Beweises von Proposition 1 (vgl. 2.1.2.4).

(a) Für je zwei Gruppen G, G' mit der Eigenschaft, daß die Kategorien
G-sets und G'-sets
äquivalent sind, gilt
$G \cong G'$.
(weil G initiales Objekt ist in der Kategorie der punktierten G-Mengen).

(b) Folgende Kategorien sind äquivalent (vgl. 2.1.2.4).

- $\pi_1(BQ\mathbf{M}, 0)$-sets
- Die Kategorie **F** der moprhismen-invertierenden Funktoren $Q\mathbf{M} \longrightarrow$ Ens
- Die Kategorie der Überlagerungsräume von B**QM**.

Zum Beweis der Behauptung reicht es somit, zu zeigen, daß die Kategorie F äquivalent ist zur Kategorie der $K_0\mathbf{M}$-Mengen. Genauer, es reicht zu zeigen, für jeden Funktor

$$F \in \mathbf{F}$$

operiert $K_0\mathbf{M}$ in natürlicher Weise auf der Menge F(0), und der so definierte Funktor

$$\mathbf{F} \longrightarrow K_0\mathbf{M}\text{-Sets}, F \mapsto F(0), \qquad (1)$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.
Bevor wir die Operation von $K_0\mathbf{M}$ auf F(0) angeben und so den Funktor (1) definieren, konstruieren wir den zugehörigen quasi-inversen Funktor.

Für jedes Objekt M von M bezeichne

$$i_M: 0 \rightarrowtail M \text{ und } j_M: M \twoheadrightarrow 0$$

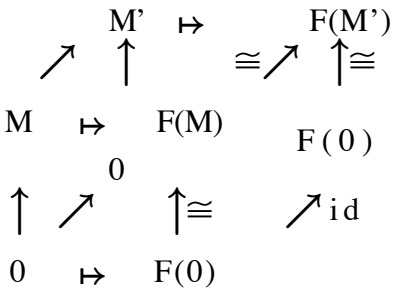
die eindeutig bestimmten Morphismen (welche Inflationen bzw. Deflationen sind).
Weiter sei

$$\mathbf{F}' \subseteq \mathbf{F}$$

die volle Teilkategorie von **F**, der Funktoren F: Q**M** $\longrightarrow$ Ens von **F** mit

$$F(M) = F(0) \text{ und } F(i_{M!}) = id_{F(0)}$$

für jedes M. Dann ist jedes F aus **F** isomorph zu einem Objekt von **F'** (weil die Funktoren von **F** morphismen-invertierend sind),



d.h. die Kategorien **F** und **F'** sind äquivalent, und es reicht zu zeigen,

$$\mathbf{F}' \text{ ist äquivalent zu } K_0\mathbf{M}\text{-Sets.}$$

Sei S irgendeine $K_0\mathbf{M}$-Menge. Wir betrachten den Funktor

$$F_S: Q\mathbf{M} \longrightarrow \text{Ens}$$

mit

$F_S(M) = S$ für jedes Objekt M von **M**.
$F_S(i_!) = id_S$ für jede Inflation i von **M**.
$F_S(j^!)$ = Multiplikation[115] mit [Ker j] auf S für jede Deflation j von M.

Man beachte, die drei Abbildungen F_S sind zunächst für Objekte, Inflationen bzw. Deflationen von M definiert und genügen den Bedingungen von 2.2.5 (ii), die Existenz des Funktors ergibt sich damit aus der Universalitätseigenschaft der Kategorie Q**M**.
Wir erhalten also einen Funktor

$$K_0\mathbf{M}\text{-Sets} \longrightarrow \mathbf{F}', S \mapsto F_S.$$

---

[115] Wir beschreiben das Bild eines Elements $s \in S$ bei der Operation $[\text{Ker } j] \in K_0(\mathbf{M})$ als Multiplikation mit [Ker j].

Sei umgekehrt $F \in \mathbf{F}'$. Für jede Inflation $i: M' \rightarrowtail M$ gilt $i \circ i_{M'} = i_M$ also

$$F(i_!) \circ F(i_{M',!}) = F(i_{M!})$$

d.h. $F(i_!) \circ id_{F(0)} = id_{F(0)}$, d.h.

$$F(i_!) = id_{F(0)}.$$

Für jede Konflation

$$0 \longrightarrow M' \overset{i}{\rightarrowtail} M \overset{j}{\twoheadrightarrow} M'' \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

erhalten wir[116]

$$j^! \circ i_{M'',!} = i_! j^!_{M'},$$

also $F(j^!) = F(j^!_{M'},) \in \mathrm{Aut}(F(0))$. Analog ist $j^!_M = j'^! j^!_{M''}$, also

$$F(j^!_M) = F(j'^! j^!_{M''}) = F(j'^!) F(j^!_{M''})$$

Zusammen ergibt sich

$$F(j^!_M) = F(j^!_{M'},) F(j^!_{M''})$$

für jede exakte Sequenz (2), d.h. die Abbildung

$$|\mathbf{M}| \longrightarrow \mathrm{Aut}(0),\ M \mapsto F(j^!_M),$$

ist additiv. Auf Grund der Universalitätseigenschaft von $K_0(\mathbf{M})$ faktorisiert sich diese Abbildung über die natürliche Abbildung

$$|\mathbf{M}| \longrightarrow K_0(\mathbf{M}),\ M \mapsto [M],$$

d.h. es gibt einen eindeutig bestimmten Gruppen-Homomorphismus

$$K_0(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F(0)),\ [M] \mapsto F(j^!_M).$$

Wir haben damit eine natürliche Operation von $K_0(\mathbf{M})$ auf $F(0)$ konstruiert für jeden Funktor F aus $\mathbf{F}'$. Der sich ergebende Funktor

$$F' \longrightarrow K_0(\mathbf{M})\text{-Sets},\ F \mapsto F(0),$$

ist invers zum Funktor $S \mapsto F_S$, also ein Isomorphismus.

QED.

2.2.4 Höhere K-Gruppen 19

Die gerade bewiesene Aussage bietet eine gewisse Motivation für die folgende Definition der K-Gruppen einer kleinen exakte Kategorie **M**.

$$K_i\mathbf{M} := \pi_{i+1}(B(Q(\mathbf{M})), 0).$$

Bemerkungen

(i) Die Definition der K-Gruppen ist unabhängig von der speziellen Wahl des Null-Objekts 0. Ist nämlich 0' ein weiteres Null-Objekt von M, so gibt es genau einen Morphismus $0 \longrightarrow 0'$ in QM, d.h. im klassifizierenden Raum gibt es einen ausgezeichnet Weg von 0 nach 0' und damit einen eindeutig bestimmten (d.h. natürlichen) Isomorphismus der zu gehörigen Homotopie-Gruppen.

(ii) Ist **M** eine nicht-notwendig kleine exakte Kategorie mit der Eigenschaft, daß die Isomorphieklassen der Objekte von **M** eine Menge bilden, so kann man nach dem Auswahl-Axiom aus jeder Isomorphie-Klasse ein Objekt auswählen und so eine volle

---

[116] Beide Seiten haben die Quelle 0 und das Ziel M.

Teilkategorie bauen, deren Objekte gerade die ausgewählten sind. Die so erhaltene Kategorie ist klein, exakt und äquivalent zur gegebenen Kategorie **M**.
Deshalb läßt sich die obige Definition der K-Gruppe auf die gegebene Kategorie erweitern: wir sethzen

$$K_1\mathbf{M} := K_1\mathbf{M}',$$

mit einer kleinen exakten Teilkategorie **M**', die äquivalent ist zu **M**. Die Definition hängt (bis auf natürliche Isomorphie) nicht von der speziellen Wahl von **M**' ab. Ist nämlich **M**" eine weiter solche Kategorie, so besitzen die natürlichen Einbettungen

$$\mathbf{M}' \hookrightarrow \mathbf{M} \text{ und } \mathbf{M}'' \hookrightarrow \mathbf{M}$$

quasi-inverse Funktoren. Mit **M**' und **M**" ist $\mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}''$ klein, und die natürlichen Einbettungen

$$\mathbf{M}' \hookrightarrow \mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}'' \text{ und } \mathbf{M}'' \hookrightarrow \mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}''$$

besitzen quasi-inverse Funktoren. Dasselbe gilt für die induzierten Einbettungen

$$Q\mathbf{M}' \hookrightarrow Q(\mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}'') \text{ und } Q\mathbf{M}'' \hookrightarrow Q(\mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}'').$$

Diese induzieren also Homotopie-Äquivalenzen auf den klassifizierenden Räumen (nach Proposition 2, vgl. 2.1.4.2). Wir erhalten eindeuitg bestimmte (natürliche) Isomorphismen

$$K_1\mathbf{M}' \xrightarrow{\cong} K_1(\mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}'') \text{ und } K_1\mathbf{M}'' \xrightarrow{\cong} K_1(\mathbf{M}' \bigcup \mathbf{M}'').$$

und damit eindeutig bestimmte (natürliche) Isomorphismen

$$K_1\mathbf{M}' \xrightarrow{\cong} K_1\mathbf{M}''.$$

Vereinbarung **19**

Von jetzt an wollen wir, falls nicht explizit anders erwähnt, nur noch exakte Kategorien betrachten, für welche die Isomorphie-Klassen der Objekte eine Mengen bilden.

Wir werden weiterhin, wann immer wir die Ergebnissen von 2.1 anwenden, annehmen, daß wir eventuell vorkommende große exakte Kategorien durch kleine exakte Teilkategorien ersetzt haben.

2.2.5 Elementare Eigenschaften von K-Gruppen 19

(i) Jeder exakte Funktor f: $\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}'$ von exakten Kategorien M , M' induziert einen Funktor $Q\mathbf{M} \longrightarrow Q\mathbf{M}'$ und damit einen Homomorphismus der K-Gruppen, welchen wir mit

$$f_*: K_1\mathbf{M} \longrightarrow K_1\mathbf{M}' \qquad (1)$$

bezeichnen. Auf diese Weise wird K_1 zu einem Funktor

$$K_1 : \{\text{exakte Kategorien und exakte Funktoren}\} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Isomorphe Funktoren induzieren dabei denselben Homomorphismus auf den K-Gruppen (nach Proposition 2, vgl. 2.1.4.2).

(ii) Für jede exakte Kategorie M gilt

$$K_1(\mathbf{M}^{op}) = K_1(\mathbf{M})$$

(nach den Bemerkungen 2.2.5(ii) und 2.1.4.1(ii)).

(iii) Das Produkt $\mathbf{M} \times \mathbf{M}'$ zweier exakter Kategorien ist eine exakte Kategorie, in der eine Sequenz genau dann exakt ist, wenn es ihre Projektionen in **M** und **M**' sind. Man sieht leicht, daß

$$Q(\mathbf{M} \times \mathbf{M}') \xrightarrow{\cong} Q(\mathbf{M}) \times Q(\mathbf{M}')$$

ist. Der Übergang zum klassifizierenden Raum kommutiert mit direkten Produkten,

$$BQ(\mathbf{M} \times \mathbf{M}') \xrightarrow{\cong} BQ(\mathbf{M}) \times BQ(\mathbf{M}')$$

(vgl. Anhang Simpliziale Mengen/Realisierung/Satz von Eilenberg-Zilber). Wir gehen zur Homotopie über und erhalten den Isomorphismus abelscher Gruppen[117]

$$K_i(\mathbf{M} \times \mathbf{M}') \xrightarrow{\cong} K_i(\mathbf{M}) \oplus K_i(\mathbf{M}'), \; x \mapsto (pr_{1*}x \, , \, pr_{1*}x).$$

(iv) Der Funktor $\oplus$: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$, $(M,M') \mapsto M \oplus M'$ ist exakt für jede exakte Kategorie $\mathbf{M}$, induziert also einen Gruppen-Homomorphismus

$$K_i(\mathbf{M}) \oplus K_i(\mathbf{M}) = K_i(\mathbf{M} \times \mathbf{M}) \xrightarrow{\oplus_*} K_i(\mathbf{M}).$$

Dieser Homomorphismus stimmt mit der Addition der abelschen Gruppe überein. Zum Beweis reicht es wegen

$$\oplus_*(x, y) = \oplus_*((x,0) + (0,y)) = \oplus_*((x,0)) + \oplus_*((0,y))$$

zu zeigen, daß die Einschränkung von $\oplus_*$ auf die beiden direkten Summanden $K_i(\mathbf{M})$ gerade die Identität ist. Die Einschränkugn auf den ersten direken Summanden ist induziert durch die Komposition

$$\mathbf{M} \xrightarrow{q_1} \mathbf{M} \times \mathbf{M} \xrightarrow{\oplus} \mathbf{M}, \; M \mapsto (M, 0) \mapsto M \oplus 0 \cong M,$$

also tatsächlich die Identität.[118] Analog verfährt man mit dem zweiten direkten Summanden.

(v) Seien J eine kleine filtrierende Kategorie,

$$J \longrightarrow \{\text{exakte Kategorien und exakte Funktoren}\}, \; j \mapsto \mathbf{M}_j,$$

ein Funktor mit Werten in der Kategorie der exakten Kategorien und exakten Funktoren und

$$\mathbf{M} := \varinjlim_j \mathbf{M}_j$$

der direkte Limes in Sinne von Propositin 3 (d.h. 2.1.4.6).[119] Dann ist M in natürlicher Weise eine exakte Kategorie, und es gilt

$$Q\mathbf{M} := \varinjlim_j Q\mathbf{M}_j.$$

---

[117] Die Einbettungen $q: \mathbf{M} \hookrightarrow \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}'$, $x \mapsto (x, 0)$, und $q': \mathbf{M}' \hookrightarrow \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}'$, $x \mapsto (0, x)$, induzieren die Umkehrung

$$K_i(\mathbf{M}) \oplus K_i(\mathbf{M}') \xrightarrow{\cong} K_i(\mathbf{M} \times \mathbf{M}'), \; (x,x') \mapsto q_*x + q'_*x'.$$

[118] Der Funktor ist isomorph zum identischen Funktor, induziert also auf den K-Gruppen denselben Homomorphismus wie der identische Funktor.

[119] d.h.

$$|C| := \varinjlim_{i \in I} |C_i|$$

und

$$Mor(C) := \varinjlim_{i \in I} Mor(C_i).$$

(beide Limites sind in der Kategorie der Mengen zu nehmen).

Nach Proposition 3 ist dann

$$K_i\mathbf{M} := \varinjlim_j K_i\mathbf{M}_j.$$

2.2.6 Beispiel: endlich erzeugte projektive Moduln 20

Seien A ein Ring mit 1 und bezeichne

$$\mathbf{P}(A)$$

die additive Kategorie der (linken) projektiven endlich erzeugten A-Moduln. Wir versehen $\mathbf{P}(A)$ mit der Struktur einer exakten Kategorie, indem wir diejenigen Sequenzen in $\mathbf{P}(A)$ als exakt ansehen, welche exakt sind in der Kategorie A-Mod aller A-Moduln, und definieren K-Gruppen des Rings A als

$$K_iA := K_i\mathbf{P}(A).$$

Ein Homomorphismus $A \longrightarrow A'$ von Ringen mit 1 induziert einen Funktor

$$A'\otimes_A : \mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A').$$

Dieser Funktor ist eindeutig bestimmt bis auf natürliche Isomorphie (und exakt!). Also induziert er einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$(A'\otimes_A)_* : K_iA \longrightarrow K_iA'. \tag{1}$$

Auf diese Weise wird K_iA ein kovarianter Funktor in A,

$$K_i : (\text{Ringe mit } 1) \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Nach Bemerkung 2.2.5 (iv) gilt für je zwei Ringe A, A' mit 1:

$$K_i(A\times A') = K_iA \oplus K_iA'. \tag{2}$$

Ist $\{A_j\}_{j\in J}$ ein filtriertes induktives System von Ringen mit 1, so gilt nach Bemerkung 2.2.5 (v):

$$K_i(\varinjlim_{j\in J} A_j) = \varinjlim_{j\in J} K_iA_i. \tag{3}$$

(siehe unten).

Schließlich ist der Funktor

$$\mathbf{P}(A) \longrightarrow \mathbf{P}(A^{op}),\ M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,A),$$

eine Äquivalenz von Kategorien,[120] wobei A^{op} der Ring mit der entgegengesetzten Multiplikation sei. Deshalb gilt

---

[120] Es reicht zu zeigen, durch

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M,A), A),\ m \mapsto (\ell \mapsto \ell(m)).$$

ist ein funktorieller Isomorphismus (für M endlich erzeugt und projektiv) definiert. Die Funktorialität sieht man durch direktes Nachrechnen. Zeigen wir die Bijektiviät.

Im Fall $M = M' \oplus M''$ gilt die Behauptung genau dann für M wenn sie für M' und M'' gilt (weil der Hom-Funktor mit endlichen direkten Summen kommutiert). Weil M projektiv ist, könnnen wir deshalb annehmen,

$$M = A^r.$$

Damit können wir aber auch annehmen, M = A. Weil die Elemente von Hom/(A,A) durh 1×1-Matrizen gegeben sind, können wir diesen Modul mit A identifizieren. Die Abbildung bekommt dann die Gestalt

$$A \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, A),\ m \mapsto (x \mapsto xm).$$

$$K_i A = K_i(A^{op}) \tag{4}$$

Beweis von (3). Es reicht zu zeigen,

$$\mathbf{P}(\varinjlim_{j\in J} A_j) = \varinjlim_{j\in J} \mathbf{P}A_i.$$

Zum Beweis können wir bei Bedarf die Kategorien $\mathbf{P}(A)$ auch durch äquivalente Kategorien ersetzen. Für jeden Ring A mit 1 bezeichne

$$P(A)'$$

die Kategorie deren Objekte die quadratischen Matrizen M mit Einträgen aus A sind, die mit ihrem Quadrat übereinstimmen,

$$M \in A^{r\times r} \text{ mit } M^2 = M.$$

Für je zwei solche Matrizen $M \in A^{r\times r}$ und $M'\in A^{r'\times r'}$ sei ein Morphismus

$$M \longrightarrow M'$$

ein Paar (N, N') von Matrizen aus $A^{r'\times r}$ mit

$$N'M = M'N. \tag{5}$$

Für $X \in A^{r'\times r}$ bezeichne

$$f_X: A^r \longrightarrow A^{r'},\ x \mapsto Xx,$$

die zur Matrix X gehörige A-lineare Abbildung. Bedingung (5) bedeutet dann gerade, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} A^r & \xrightarrow{f_M} & A^r \\ {\scriptstyle f_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_N}, \\ A^{r'} & \xrightarrow{f_{M'}} & A^{r'} \end{array} \tag{6}$$

Die Komposition der Morphismen (N,N') und (L, L') sei durch die Formel

$$(N,N')\circ(L,L') := (NL, N'L')$$

gegeben, entspreche also gerade der Zusammensetzung einander entsprechender vertikaler Abbildungen des kommutativen Vierecks.
Betrachten wir den folgenden Funktor.

$$P(A)' \longrightarrow A\text{-Mod},\ M \mapsto \mathrm{Ker}(f_M). \tag{7}$$

Man beachte, der Morphismus (N, N') definiert auf Grund der Kommutativität des Diagramm (6) eine A-lineare Abbildung $\mathrm{Ker}(f_M) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_{M'})$. Diese sei gerade das Bild von (N, N') beim Funktor (7).
Vereinbarung:
Für jede feste Paar (r, r') wollen wir zwei Morphismen von P(A)' als glieich ansehen, wenn sie dieselbe lineare Abbildung auf den Kernen definieren.

1. Schritt. Der Funktor (7) faktorisiert sich über die natürliche Einbettung

$$\mathbf{P}(A) \hookrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},$$

definiert also einen Funktor

$$P(A)' \longrightarrow \mathbf{P}(A),\ M \mapsto \mathrm{Ker}(f_M).$$

Wir haben zu zeigen, jeder A-Modul der Gestalt $\mathrm{Ker}(f_M)$ ist endlich erzeugt und projektiv. Dazu betrachten wir die A-lineare Abbildung

---

Diese Abbildung ordnet jeder 1×1-Matrix die zugehörigen A-linere Abbildung zu, ist also bijektiv.

$$A^r \xrightarrow{f_M} A^{r'}.$$

Wegen Id = (Id - M) + M gilt

$$A^r = \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}}) + \mathrm{Im}(f_M).$$

d.h. jedes Element $x \in A^r$ läßt sich als eine Summe der Gestalt

$$x = x' + x''$$

schreiben mit $x' \in \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}})$ und $x'' \in \mathrm{Im}(f_M)$. Zeigen wir zunächst, daß diese Zerlegung eindeutig ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß mit $x = 0$ auch $x' = x'' = 0$ gilt. Aus

$$0 = x' + x'' \text{ mit } x \in \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}}) \text{ und } x'' \in \mathrm{Im}(f_M)$$

erhalten wir durch Multiplikation mit M

$$0 = Mx' + Mx''.$$

Wegen $M^2 = M$ gilt dabei $Mx'' = x''$ und wegen $M(\mathrm{Id} - M) = M - M^2 = M - M = 0$ ist $Mx' = 0$. Also gilt

$$0 = 0 + x'',$$

also $x'' = 0$ und $x' = 0$. Wir haben gezeigt die obige Summen-Zerlegung ist direkt,

$$A^r = \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}}) \oplus \mathrm{Im}(f_M).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Ker}(f_M) = \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}}),$$

denn dann ist $\mathrm{Ker}(f_M)$ als Bild des endlich erzeugten A-Moduls A^r endlich erzeugt und als direkter Summand des freien A-Moduls A^r projektiv. Sei

$$x = x' + x'' \in \mathrm{Ker}(f_M)$$

Durch Multiplikation mit M erhalten wir $0 = 0 + x''$, d.h. $x'' = 0$, d.h.

$$x = x' \in \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}}).$$

Sei jetzt umgekehrt

$$x \in \mathrm{Im}(f_{\mathrm{Id-M}}),$$

d.h. $x = (\mathrm{Id} - M)y$ für ein $y \in A^r$, d.h.

$$Mx = M(\mathrm{Id} - M)y = (M - M^2)y = (M-M)y = 0,$$

d.h. $x \in \mathrm{Ker}(f_M)$.

2. Schritt. Der Funktor $F: P(A)' \longrightarrow \mathbf{P}(A)$, $M \mapsto \mathrm{Ker}(f_M)$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Wir haben zu zeigen,

1. F ist völlig treu.

2. Jedes Objekt von P(A) ist isomorph zu einem Objekt der Gestalt F(X) mit $X \in P(A)'$.

Zu 2. Sei P ein endlich erzeugter projektiver A-Modul. Dann gibt es einen endlich erzeugten freien A-Modul, sagen wir A^r mit

$$A^r = P \oplus P'.$$

Sei f der A-lineare Endomorphismus

$$f: A^r \longrightarrow A^r, (x, x') \mapsto x',$$

und $M \in A^{r \times r}$ die Matrix von f. Dann gilt $f^2 = f$, also $M^2 = M$, d.h. M ist ein Objekt aus P(A)'. Nach Konstruktion ist $f = f_M$, also

$$\mathrm{Ker}(f_M) = \mathrm{Ker}(f) = \{(x,x') \in A^r \mid x' = 0\} \cong P.$$

Zu 1. Sei (N, N'): M $\longrightarrow$ M' ein Morphismus von P(A)'. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(f_M) & \hookrightarrow A^r & \xrightarrow{f_M} A^r \\ \downarrow & f_N\downarrow & \downarrow f_N, \\ \mathrm{Ker}(f_{M'}) & \hookrightarrow A^{r'} & \xrightarrow{f_{M'}} A^{r'} \end{array} \qquad (8)$$

Die linke vertikale Abbildung ist gerade das Bild von (N, N') beim Funktor F. Auf Grund der obigen Vereinbarung zu den Morphismen von P(A)' ist die durch F definierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}(M, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M), F(M')) \qquad (9)$$

injektiv. Wir haben zu zeigen, daß sie ach surjektiv ist. Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(F(M), F(M'))$, d.h. eine A-lineare Abbildung

$$\alpha: \mathrm{Ker}(f_M) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_{M'}).$$

Weil $\mathrm{Ker}(f_M)$ ein direkter Summand von A^r ist, können wir α zu einer A-linearen Abbildung $A^r \longrightarrow A^r$ fortsetzen. Mit anderen Worten, zu vorgegebenen linken vertikalen Morphismus in (8) können wir einen vertikalen Morphismus in der Mitte finden, so daß das linke Viereck kommutativ wird. Weil die Zeilen von (8) exakt sind, können wir dann aber auch einen vertikalen Morphismus rechts finden, so daß auch das rechte Viereck kommutativ wird. Damit haben wir zu vorgegebenen α ein Urbild bei der Abbildung (9) gefunden.

3. Schritt. $P'(\varinjlim_{j\in J} A_{\cdot j}) = \varinjlim_{j\in J} P'A_{i\cdot}$.

Sei $A := \varinjlim_{j\in J} A_{ij}$. Ein Objekt von P(A)' ist eine Matrix $M \in A^{r\times r}$ mit $M^2 = M$. Da die Anzahl der Einträge von M endlich ist, gibt es ein j und ein

$$M' \in A_j^{r\times r}$$

derart, daß jeder Eintrag von M gerade das Bild in A des entsprechenden Eintrags von M' ist. Da die Relation $M^2 = M$ eine Relation zwischen endlich vielen Elementen von A ist, können wir durch 'vergrößern' von j erreichen, daß gilt

$$M'^2 = M',$$

d.h. $M' \in P(A_{\cdot j})'$. Das natürliche Bild von M' in P(A)' ist nach Konstruktion gerade M. Wir haben gezeigt, die natürliche Abbildung

$$\varinjlim_{j\in J} P'A_{i\cdot} \longrightarrow P'(\varinjlim_{j\in J} A_{\cdot j}) \qquad (10)$$

ist surjektiv.

Seien jetzt $M' \in P(A_{i\cdot})$ und $M'' \in P(A_{\cdot j})'$ zwei Objekte mit demselben Bild in

$$P'(\varinjlim_{j\in J} A_{\cdot j}).$$

Dann haben M' und M'' denselben Typ (r, r), und für jede Position (i,j) der beiden Matrizen gibt es einen Index $\ell \in J$ mit

$$i \leq \ell \text{ und } j \leq \ell,$$

für welchen die beiden Einträge von M' und M" in der Position (i, j) dasselbe Bild in A_ℓ haben. Da die Anzahl der Positionen einer r×r-Matrix endlich ist, können wir ℓ sogar so wählen, daß dies für alle Eintrage gleichzeitig gilt. Dann sind aber die Bilder von M' und M"
in

$$P(A_\ell)$$

gleich, d.h. M' und M" repräsentieren dasselbe Objekt von $\varinjlim_{j \in J} P'A_i$. Wir haben gezeigt, die natürliche Abbildung (10) ist injektiv.

QED.

2.2.7 Bemerkungen

Man kann zeigen, daß die hier definierten Gruppen $K_i A$ mit denjenigen übereinstimmen, welche man erhält, wenn man BGL(A) die Struktur eines H-Raums gibt und dann zu den Homotopie-Gruppen übergeht (siehe zum Beispiel [Gersten 5]).

2.3 Charakteristische exakte Sequenzen und Filtrationen 21

2.4 Reduktion durch Auflösungen 24
Transfer-Abbildungen 27

2.5 Abstieg und Lokatisierung in abelschen Kategorien 28

3. Anwendungen

2.6. Filtrierte Ringe und die Homotopie-Eigenschaft regulärer Ringe 33
Graduierte Ringe 33
Filtrierte Ringe 35

2.7 K'-Theorie für Schemata 40
1. Definitionen 40
2. Funktorielles Verhalten 40
3. Abeschlossene Teilschemata 43
4. Affine und projektive Bündel 44
5. Träger-Filtration, Gersten-Vermutung, Chow-Ring 46

2.8 Projektive Faserbündel 54
1. Kanonische Auflösung einer regulären Garbe auf PE 54
2. Der Satz vom projektiven Bündel 58
3.Die projektive Gerade über einem Ring 59
4. Brauer-Severi-Schemata und Azumaya-Algebren 60

Anhänge

Kategorien

Der Begriff der Kategorie reflektiert die Erfahrung, daß es zu nahezu jeder mathematischen Konstruktion in Abbildungen gibt, die zu dieser Konstruktion gehörigen.

Vektorräume	lineare Abbildungen
Gruppen	Gruppen-Homomorphismen
Ringe	Ring-Homorphismen
topologische Räume	stetige Abbildungen
metrische Räume	kontrahierende Abbildungen#
glatte Mannigfaltigkeiten	differenzierbare Abbildungen
komplexe Mannigfaltigkeiten	holomorphe Abbildungen
algebraische Varietäten	reguläre Abbildungen

Definitionen

Begriff der Kategorie

Ein Kategorie **C** besteht aus einer Klasse, deren Elemente Objekte von **C** heißen und die mit

$$|\mathbf{C}|$$

bezeichnet wird. Zu je zwei Objekten A, B von **C** gehört eine Menge, die mit

$$\mathrm{Hom}/(A, B) \text{ oder auch } \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$$

bezeichnet wird und deren Elemente Morphismen mit der Quelle A und dem Ziel B heißen. Für einen Morphismus f mit der Quelle A und dem Ziel B verwendet man auch die Bezeichnung

$$A \longrightarrow B \text{ oder auch } A \overset{f}{\longrightarrow} B.$$

Zu je drei Objekten A , B, C von **C** gehört eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C), (f, g) \mapsto g \circ f,$$

welche Morphismen-Komposition von **C** heißt. Dabei sollen die folgende drei Bedingungen erfüllt sein.

(i) Sind (A, B) und (A', B') zwei verschiedene Paare von Objekten von **C**, so sind die zugehörigen Hom-Mengen disjunkt,

$$\mathrm{Hom}(A, B) \bigcap \mathrm{Hom}(A', B').$$

(ii) Die Morphismen-Komposition ist assoziativ, d.h. für je drei Morphismen

$$A \overset{h}{\longrightarrow} B \overset{g}{\longrightarrow} C \overset{f}{\longrightarrow} D$$

gilt

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

(iii) Für jedes Objekt A von C enthält die zugehörige Hom-Menge einen identischen Morphismus

$$1_A \in \mathrm{Hom}(A, A),$$

d.h. einen Morphismus mit

$$1_A \circ f = f \text{ und } g \circ 1_A = g$$

für jeden Morphismus f mit dem Ziel A und jeden Morphismus g mit der Quelle A.

Beispiele: Ens, Top, Ab, R-Mod, Mod-R

Begriff des Funktors

Begriff der natürlichen Transformation

Spezielle Morphismen

Ein Morphismus f: A $\longrightarrow$ B heißt Epimorphismus, wenn für je zwei Morphismen verschiedene Morphismen g',g": B $\longrightarrow$ C mit der Quelle B auch g'f und g"f verschieden sind.

Ein Morphismus f: A $\longrightarrow$ B heißt Monomorphismus, wenn für je zwei verschiedene Morphismen g', g": C $\longrightarrow$ A mit dem Ziel A auch fg' und fg" verschieden sind.

Ein Morphismus f: A $\longrightarrow$ B heißt Isomorphismus, wenn es einen Morphismus g:B$\longrightarrow$A gibt mit $f \circ g = 1_B$ und $g \circ f = 1_A$.

Ein Morphismus f: A $\longrightarrow$ A, dessen Quelle und Ziel übereinstimmen, heißt Endomorphismus von A. Die Menge der Endomorphismen von A wird mit

$$End(A) := Hom(A, A)$$

bezeichnet.
Ein Automorphismus ist ein Endomorphismus, welcher Isomorphismus ist. Die Menge der Automorphismen wird mit

$$Aut(A)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Typische Beispiele für Monomorphismen sind injektive Abbildungen. Es gibt jedoch Monomorphismen, die nicht injektiv sind (s.u).
(ii) Typische Beispiele für Epimorphismen sind surjektive Abbildungen. Es gibt jedoch Epimorphismen, die nicht surjektiv sind (s.u).
(i) Jeder Isomorphismus ist sowohl ein Monomorphismus als auch ein Epimorphismus. Die Umkehrung dieser Aussage ist im allgemeinen falsch (s.u.).
(ii) End(A) ist eine Halbgruppe mit 1. Aut(A) ist eine Gruppe mit dem neutralen Element 1_A.

Beispiel eines nicht surjektiven Epimorphismus
In der Kategorie Top der tologischen Räume und stetigen Abbildungen ist die natürliche Einbettung

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

der rationalen Zahlen in die reellen Zahlen ein Epimorphismus.

Beispiel eines nicht injektiven Monomorphismus
Sei C die Kategorie, deren einziges Objekt die Menge der reellen Zahlen ist,

$$|C| = \{\mathbb{R}\}.$$

Die Menge

$$Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

bestehe aus der identischen Abbildung und den Abbildungen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Werte ≥ 0 sind.

Die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow x^2,$$

ist ein Morphismus dieser Kategorie (und offensichtlich nicht injektiv). Für zwei Morphismen

$$g', g'': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $fg' = fg''$ gilt $g'(x)^2 = g''(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $|g'(x)| = |g''(x)|$. Da die Werte von g' und g'' nicht-negativ sind, folgt $g'((x) = g''(x)$ für alle x, also $g' = g''$. Mit anderen Worten, f ist ein Monomorphismus.

Beispiel eines bijektiven Morphismus, der kein Isomorphismus ist

Seien K ein Körper und C die Kategorie der Paare (V, W) mit einem K-Vektorraum V und einem K-linearen Unterraum $W \subseteq V$. Die Morphismen von C mit der Quelle (V,W) und dem Ziel (V', W') seien die K-linearen Abbildungen

$$f: V \longrightarrow V' \text{ mit } f(W) \subseteq W'.$$

Die Morphismen-Komposition sei die gewöhnlich Zusammensetzung von Abbildungen. Seien

$$V := K^3,\ U := Ke_1\ ,$$

$$V' := K^3,\ U' := Ke_1 + Ke_2$$

Dabei bezeichne e_1, e_2, e_3 die Standard-Basis von K^3. Dann ist die identische Abbildung

$$f = Id: V \longrightarrow V'$$

ein bijektiver Morphismus $f: (V, U) \longrightarrow (V', U')$. Die Umkehrung ist aber kein Morphismus $(V', U') \longrightarrow (V, U)$, weil das Bild von U' nicht in U liegt, d.h. f ist kein Isomorphismus von C.

Darstellbare Funktoren

Ein Funktor

$$f: C^{op} \longrightarrow Ens$$

heißt darstellbar, wenn es ein Objekt $X \in C$ gibt mit der Eigenschaft, daß f isomorph ist zum Funktor

$$h_X = Hom(?, X): C^{op} \longrightarrow Ens,\ Y \mapsto Hom(Y, X).$$

Das Objekt X heißt dann darstellendes Objekt für f.
Sei

$$\xi: h_X \overset{\cong}{\longrightarrow} f$$

Dann heißt das Bild des identischen Morphismus

$$1_X \in h_X(X) = Hom(X, X)$$

bei

$$\xi_X: h_X(X) \longrightarrow f(X)$$

darstellendes Element oder auch universelle Familie für f und wird mit

$$u_f = u_{f,X} = \xi_X(1_X) \in f(X)$$

bezeichnet. Das Paar $(X, u_{f,X})$ heißt auch darstellendes Paar.

Beispiel
Seien U, V, W Vektorräum über dem Körper K und bezeichne

$$L(U, V; W)$$

die Menge der über K bilinearen Abbildungen $U \times V \longrightarrow W$. Dann ist der Funktor

$$K\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ens}, W \mapsto L(U, V; W),$$

darstellbar. Das Tensorprodukt $U \otimes_K V$ ist kodarstellendes Objekt und die natürliche Abbildung

$$U \times V \longrightarrow U \otimes_K V$$

das kodarstellende Element.

Satz
(i) Das darsttlende Paar ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
(ii) Ein darstellbarer Funktor ist durch sein darstellbares Paar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis.

QED.

Adjungierte Funktoren

Definition
Zwei Funktoren

$$f: C \longrightarrow D \text{ und } g: D \longrightarrow C$$

bilden ein <u>adjungiertes Paar</u> (f,g) wenn es einen funktoriellen Isomorphismus

$$\text{Hom}_D(fc, d) \overset{\cong}{\longrightarrow} \text{Hom}_C(c, gd),\ c \in C,\ d \in D,$$

von Funktoren $C^{op} \times D \longrightarrow$ Ens gilt. Der Funktor f heißt dann <u>linksadjungiert</u> zu g und g heißt <u>rechtsadjungiert</u> zu f.

Bemerkungen
(i) Aus der obigen Isomorphie ergibt sich insbesondere, daß der Funktor

$$C \longrightarrow \text{Ens}, d \mapsto \text{Hom}_C(c, gd),$$

für jedes $c \in C$ darstellbar und fc das darstellende Objekt ist.
(ii) Zu einem gegebene Funktor sind die links- bzw. rechtsadjungierten Funktoren, falls sie existieren, bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt. Das ergibt sich aus der Eindeutigkeit des darstellenden Objekts bis auf natürliche Isomorphie.

Eigenschaften adjungierter Funktoren
Sei (f, g) ein adjungiertes Paar. Dann gilt
(i) f kommutiert mit direkten Limites, direkten Summen, terminalen Objekten, Kokernen, ...
(ii) g kommutiert mit inversen Limites, direkten Produkten, initialen Objekten, Kernen, ...

Beweis. Die beiden Aussagen sind dual zueinander. Es reichte Aussage (i) zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_D(\varinjlim_{i\in I} fc_i\ ,\ d) &= \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_D(fc_i\ ,\ d)\\ &= \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_C(c_i\ ,\ gd)\\ &= \mathrm{Hom}_C(\varinjlim_{i\in I} c_i\ ,\ gd)\\ &= \mathrm{Hom}_D(f(\varinjlim_{i\in I} c_i),\ d).\end{aligned}$$

Behauptung (i) folgt jetzt aus der Eindeutigkeit des darstelleneden Objekts (bis auf natürliche Isomorphie).
QED.

Adjungierte Funktoren von Zusammensetzungen
Seien

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$$

Funktoren mit der Eigenschaft, daß f, g und gf einen rechtsadjungierten Funktor

$$f^*,\ g^*,\ (gf)^*$$

besitzen. Dann gibt es eine natürliche Transformation

$$f^*g^* \longrightarrow (gf)^*.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für die linksadjungierten Funktoren f_*, g_*, $(gf)_*$, falls diese existieren. Genauer, es gilt

Beweis. Nach Voraussetzung gibt funktorielle Isomorphismen von Bifunktoren mit Werten in Ens,

$$\mathrm{Hom}_D(fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, f^*d)\ ,\ c \in C,\ d \in D \qquad (1)$$

$$\mathrm{Hom}_E(gd, e) \cong \mathrm{Hom}_D(d, g^*e)\ ,\ c \in C,\ d \in D \qquad (2)$$

$$\mathrm{Hom}_E(gfc, e) \cong \mathrm{Hom}_C(c, (gf)^*e)\ ,\ c \in C,\ e \in E \qquad (3)$$

Aus (1) erhalten wir speziell für d = g*e den funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_D(fc, g^*e) \cong \mathrm{Hom}_C(c, f^*g^*e)\ ,\ c \in C,\ e \in D \qquad (4)$$

Zur Konstruktion der gesuchten natürlichen Transformation reicht es eine natürliche Transformation von Bifunktoren

$$\mathrm{Hom}_C(c, f^*g^*e) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(c, (gf)^*e)$$

zu konstruieren, denn dann kann man c = f*g*e setzen. Die gesuchte Transformation ergibt sich dann als Bild der identischen Transformation links.
Wegen (3) und (4) reicht es, eine natürliche Transformation

$$\mathrm{Hom}_D(fc, g^*e) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(gfc, e)$$

zu finden. Weil g linksadjungiert ist zu g* (d.h. wegen (2)) kann man den linken Hom-Funktor mit $\mathrm{Hom}_E(gfc, e)$ identifizieren, d.h. gesucht ist eine natürliche Transformation

$$\mathrm{Hom}_E(gfc, e) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(gfc, e).$$

Wir wählen als eine solche die identische Transformation.
Die Aussage zu den linksadjungierten Funktoren erhalten wir, indem wir f, g und gf als Funktoren

$$C^{op} \xrightarrow{f} D^{op} \xrightarrow{g} E^{op}$$

ansehen. In allen obigen Hom-Mengen vertauschen sind dann die Argumente, und wir erhalten die Existenz eines funktoriellen Morphismus

$$\mathrm{Hom}_C(f_*g_*e, c) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C((gf)_*e, c).$$

Für $c = f_*g_*e$ ergibt sich dann als Bild der identishen natürlichen Transformation links eine natürlichen Transformation

$$(gf)_* \longrightarrow f_*g_*e.$$

QED.

Äquivalenzen von Kategorien

Etwas vereinfachend kann man sagen, zwei Kategorien sind äquivalent, wenn sie bis auf Isomorphie dieselben Objekte und Morphismen haben. Solcke Kategorien können sehr unterschiedlich sein. Betrachten wir zum Beispiel die Kategorie der punktierten topologischen Räume, die sich auf ihren Basispunkt kontrahieren lassen (d.h. die identische Abbildung ist homotop zur konstanten Abbildung). Als Morphismen dieser Kategorie verwenden wir die Homotopie-Klassen stetiger Abbildungen (die die Basispunkte respektieren). Diese Kategorie hat sehr viele Objekte. Sie ist jedoch äquivalent zur Kategorie mit nur einem Objekt und nur einem Morphismus (dem identischen Morphismus dieses Objekts).
Formale Definition der Äquivalenz von Kategorien. Zwei Funktoren

$$F: C \longrightarrow D \text{ und } G: D \longrightarrow C$$

heißen quasi-invers, wenn die beiden Zusammensetzungen

$$F\circ G: D \longrightarrow D \text{ und } G\circ F: C \longrightarrow C$$

isomorph zum identischen Funktor sind. Die beiden Funktoren heißen in diesem Fall Äquivalenzen von Kategorien. und die beiden Kategorien heißen äquivalent.

Kriterium für Äquivalenz

Ein Funktor $F: C \longrightarrow D$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) F ist völlig treu, d.h. für je zwei Objekte von A und B von X ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B)),\ f \longrightarrow F(f),$$

bijektiv (im injetiven Fall heißt der Funktor treu, im surjektiven voll).

(ii) Jedes Objekt der Kategorie D ist isomorph zu einem Objekt der Gestalt F(A) mit einem Objekt A von C.

Additive Kategorien

Definition

Eine Kategorie C heißt additiv, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) C besitzt ein Null-Objekt, d.h. ein Objekt das gleichzeitig initial und terminal ist.
(ii) C besitzt endlich direkte Summen und endlich direkte Produkte.
(iii) Die Hom-Mengen von C sind abelsche Gruppen.
(iv) Die Morphismen-Komposition

$$\mathrm{Hom}(A, B)\times\mathrm{Hom}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C),\ (f, g) \mapsto g\circ f,$$

ist bilinear.

Diese Bedingungen lassen sich etwas abschwächen und durch die folgenden Axiome ersetzen (vgl. Bass: Algebraic K-theory, Chapter I, §3).

(Add Kat. 0). C besitzt ein Null-Objekt.

(Add Kat. 1). C besitzt endliche direkte Summen und endliche direkte Produkte.

Matrizen-Schreibweise für Morphismen.

Nach Definition der direkten Summe gibt es für je zwei Morphismen

$$f_1: A_1 \longrightarrow B \text{ und } f_2: A_2 \longrightarrow B$$

genau einen Morphismus

$$\varphi: A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B$$

dessen Zusammensetzung für j = 1,2 mit der natürlichen Einbettung von A_j in die direkte Summe gleich f_j ist,

$$f_j = \varphi \circ q_j.$$

Man schreibt dann

$$\varphi = (f_1, f_2).$$

Analog gibt es nach der Definition des direkten Produkts für je zwei Morphismen

$$g_1: A \longrightarrow B_1 \text{ und } g_2: A \longrightarrow B_2$$

genau einen Morphismus

$$\varphi: A \longrightarrow B_1 \times B_2$$

dessen Zusammensetzung für j = 1,2 mit der natürlichen Projektion des direkten Produkts auf B_j gleich g_j ist,

$$g_j = p_j \circ \varphi.$$

Man schreibt dann

$$\varphi = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Weiter kann man für je zwei Objekte A_1 und A_2 einen Morphismus

$$\varphi: A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2$$

konstruieren, dessen Zusammensetzung mit der j-ten natürlichen Einbettung

$$q_j: A_j \longrightarrow A_1 \oplus A_2$$

und der i-ten natürlichen Projektion

$$p_i: A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$$

gleich einem vorgegebenen Morphismus

$$a_{ij} = p_i \varphi q_j: A_j \longrightarrow A_i$$

ist. Man schreibt dann

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{12}) \\ (a_{21}, a_{22}) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right).$$

(Add Kat. 2). Für je zwei Objekte A und B von C ist $\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}: A \oplus B \longrightarrow A \times B$ ein Isomorphismus.

Dabei bzeichne $0: A \longrightarrow B$ den Null-Morphismus, d.h. den eindeutig bestimmten Morphismus $A \longrightarrow B$, der sich über das Null-Objekt faktorisiert.

Auf Grund dieses Axioms hat für je zwei Objekte A und B von C die direke Summe $A \oplus B$ die Universalitätseigenschaft von $A \times B$ und das direkte Produkt $A \times B$ hat die Universalitätseigenschaft von $A \oplus B$. Wir können also beide Konstruktionen als gleich ansehen und vereinbaren

$$A \oplus B = A \times B.$$

Der Morphismus $\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$ wird dann zum identischen Morphismus.

Definition der Addition von Morphismen.
Bezeichne

$$\Delta_A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: A \longrightarrow A \times A = A \oplus A$$

für jedes Objekt A die Diagonal-Einbettung, d.h. den eindeutig bestimmen Morphismus, dessen Zusammensetzung mit den beiden Projektionen auf A der identische Morphismus ist,

$$p_i \circ \Delta_A = 1_A.$$

Weiter bezeichne

$$\Sigma_A = (1,1): A \oplus A = A \times A \longrightarrow A$$

für jedes Objekt den Summen-Morphismus, d.h. den eindeutig bestimmen Morphismus, dessen Zusammensetzung mit den beiden Einbettungen von A in die direkte Summe der identische Morphismus ist,

$$\Sigma_A \circ q_j = 1_A.$$

Für je zwei Morphismen

$$a: A \longrightarrow B \text{ und } b: A \longrightarrow B$$

setzt man dann

$$a+b = \Sigma_B \circ (a \oplus b) \circ \Delta_A: A \xrightarrow{\Delta_A} A \oplus A \xrightarrow{a \oplus b} B \oplus B \xrightarrow{\Sigma_B} B \qquad (1)$$

mit $a \oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Satz
Die eben definierte Addition von Morphismen definiert auf Hom(A, B) die Struktur einer kommutativen Halbgruppe mit neutralen Element, wobei der Null-Morphismus

$$0: A \longrightarrow B$$

die Rolle des neutralen Elements spielt.
Außerdem ist die Morphismen-Komposition bezüglich dieser Halbgruppen-Struktur bilinear.

(Add Kat. 3). Die Hom-Mengen sind bezüglich der oben definierten Addition abelsche Gruppen.

Vergleich der Axiome

Eine Kategorie C, welche den Bedingungen

(Add Kat. 0) - (Add Kat. 3)

genügt ist additiv.

Umgekehrt genügt jede additive Kategorie C diesen Bedingungen, und die Addittion von Morphismen in C ist durch die Formel (1) gegeben.

Zum Beweis.

Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus den gerade durchgeführten Betrachtungen. Sei umgekehrt C eine abelsche Kategorie. Dann sind trivialerweise die Bedingungen

(Add Kat. 0) und (Add Kat 1)

erfüllt.

Beweis von (Add Kat. 2). Wir haben zu zeigen, für je zwei Objekte A_1 und A_2 ist der Morphismus

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2$$

ein Isomorphismus. Wir setzen

$$\psi = q_1 \circ p_1 + q_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2.$$

wobei für i = 1 und i = 2 der Morphismus $p_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$ die i-te natürliche Projektion des direkten Produkts und $q_i : A_i \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ die i-te natürliche Einbettung in die direkte Summe sei.

Es reicht zu zeigen, φ und ψ sind zueinander invers. Es gilt

$$\psi \circ \varphi \circ q_1 = q_1 \circ p_1 \circ \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} \circ q_1 + q_2 \circ p_2 \circ \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} \circ q_1$$

$$= q_1 \circ 1_{A_1} + q_2 \circ 0$$

$$= q_1$$

und

$$\psi \circ \varphi \circ q_2 = q_1 \circ p_1 \circ \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} \circ q_2 + q_2 \circ p_2 \circ \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} \circ q_2$$

$$= q_1 \circ 0 + q_2 \circ 1_{A_2}$$

$$= q_2$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft der direkten Summe ergibt sich

$$\psi \circ \varphi = 1_{A_1 \oplus A_2}$$

Weiter gilt

$$p_1 \circ \varphi \circ \psi = p_1 \circ \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} \circ q_1 \circ p_1 + p_1 \circ \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix} \circ q_2 \circ p_2$$

$$= 1_{A_1} \circ p_1 \circ + 0 \circ p_2$$

$$= p_1$$

und

$$p_2\circ\varphi\circ\psi = p_2\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_1\circ p_1 + p_2\circ\begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 \\ 0 & 1_{A_2} \end{pmatrix}\circ q_2\circ p_2$$

$$= 0\circ p_1\circ + 1_{A_2}\circ p_2$$

$$= p_2$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft des direkten Produkts ergibt sich

$$\varphi\circ\psi = 1_{A_1\oplus A_2}$$

Wir haben die Gültigkeit von (Add Kat. 2) für aditive Kategorien bewiesen.
Zum Beweis von (Add Kat. 3) benötigen wir die beiden nachfolgenden Kriteriem für direkte Summen und direkte Produkte.
QED.

Kriterium für direkte Summen

Sei C eine additve Kategorie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Objekt A ist bezüglich der Morphismen i': A' $\longrightarrow$ A und i": A" $\longrightarrow$ A eine direkte Summe von A' und A".

(ii) Es gibt Morphismen p': A $\longrightarrow$ A' und p": A $\longrightarrow$ A" für welche die folgenden Identitäten bestehen.
1. $p'i' = 1_{A'}$, und $p"i" = 1_{A"}$
2. $p'i" = 0$ und $p"i' = 0$
3. $i'p' + i"p" = 1_A$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Seien A := A'$\oplus$A" und

$$p' := (1, 0): A \longrightarrow A', \quad p" := (0,1): A \longrightarrow A".$$

Dann gilt

$$p'i' = 1,\ p'i" = 0,\ p"i' = 0,\ p"i" = 1$$

Zum Abschluß des Beweises berechnen wir die Matrix von

$$\varphi = i'p' + i"p".$$

Es gilt

$$p'\varphi i' = p'i'p'i' + p'i"p"i' = 1 + 0 = 1$$
$$p'\varphi i" = p'i'p'i" + p'i"p"i" = 0 + 0 = 0$$
$$p"\varphi i' = p"i'p'i' + p"i"p"i' = 0 + 0 = 1$$
$$p"\varphi i" = p"i'p'i" + p"i"p"i" = 0 + 1 = 1$$

Wenn wir in der obigen Rechnung φ durch den identischem Morphismus ersetzen, erhalten wir dieselben Ergebnisse:

$$p'1i' = p'i' = 1$$
$$p'1i" = p'i" = 0$$
$$p"ii' = p"i' = 0$$
$$p"1i" = p"i" = 1.$$

Deshalb gilt $\varphi = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i).Seien zwei Morphismen j': A' $\longrightarrow$ B und j": A" $\longrightarrow$ B gegeben. Wir setzen

$$\varphi = j'p' + j''p'': A \longrightarrow B.$$

Dann gilt

$$\varphi i' = j'p'i' + j''p''i' = j' \circ 1_{A'} + j'' \circ 0 = j'$$

$$\varphi i'' = j'p'i'' + j''p''i'' = j' \circ 0 + j'' \circ 1_{A''} = j''$$

Wir haben noch zu zeigen, daß φ durch die Bedingungen

$$\varphi i' = j'$$

$$\varphi i'' = j''$$

eindeutig bestimmt ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\varphi = \varphi \circ 1_A = \varphi \circ (i'p' + i''p'') = j'p' + j''p'',$$

d.h. φ ist durch j' und j'' eindeutig festgelegt.
QED.

Kriterium für direkte Produkte

Sei C eine additve Kategorie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Objekt A ist bezüglich der Morphismen $p': A \longrightarrow A'$ und $p'': A \longrightarrow A''$ eine direkte Summe von A' und A''.

(ii) Es gibt Morphismen $p': A \longrightarrow A'$ und $p'': A \longrightarrow A''$ für welche die folgenden Identitäten bestehen.
1. $p'i' = 1_{A'}$, und $p''i'' = 1_{A''}$
2. $p'i'' = 0$ und $p''i' = 0$
3. $i'p' + i''p'' = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). $A = A' \times A''$ und

$$i' := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : A' \longrightarrow A \,, \; i'' := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : A'' \longrightarrow A.$$

Dann gilt

$$p'i' = 1, \; p'i'' = 0, \; p''i' = 0, \; p''i'' = 1.$$

Zum Schluß des Beweises berechnen wir die Matrix von

$$\varphi = i'p' + i''p''.$$

Dieselbe Rechnung wie beim Beweis der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) zur Charakterisierung der direkten Summen zeigt, es gilt $\varphi = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seien zwei Morphismen $q': B \longrightarrow A'$ und $q'': B \longrightarrow A''$ gegeben. Wir setkzen

$$\varphi := i'q' + i''q'': B \longrightarrow A.$$

Dann gilt

$$p'\varphi = p'i'q' + p'i''q'' = 1_{A'} \circ q' + 0 \circ q'' = q'$$

$$p''\varphi = p''i'q' + p''i''q'' = 0 \circ q' + 1_{A''} \circ q'' = q''$$

Wir haben noch zu zeigen, daß φ durch die Bedingungen

$$p'\varphi = q'$$

$$p''\varphi = q''$$

eindeutig bestimmt ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist

$$\varphi = 1_A \circ \varphi = (i'p' + i''p'') \circ \varphi = i'q' + i''q'',$$

d.h. φ ist durch q' und q" eindeutig festgelegt.

QED.

Die Matrix einer Zusammensetzung von Morphismen

Auf Grund der letzten beiden Kriterien können wir im folgenden direkte Produkte mit den entsprechenden direkten Summen identifizieren. Jede direkte Summe $A_1 \oplus A_2$ ist jetzt also außer mit zwei natürlichen Einbettungen q_i (i = 1,2) auch mit zwei natürlichen Projektionen p_j (j=1,2) versehen, wobei die p's durch die beiden q' eindeutig festgelegt sind und umgekehrt und die p's und q' zusammen den Bedingungen (ii) der beiden obigen Kriterien genügen.

Ein Morphismus

$$\varphi: A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$$

ist dann durch die Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} := p_i \varphi q_j$$

gegeben.
Die Zusammensetzung von Morphismen entspricht dabei gerade der Multiplikation der zugehörigen Matrizen.

Genauer: sei

$$\psi: B := B_1 \oplus B_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$$

ein weiterer Morphismus, dessen Matrix die Einträge

$$b_{ij} := p_i \psi q_j$$

besitzt. Dann hat die Matrix der Zusammensetzung von φ und ψ die folgenden Einträge.

$$\begin{aligned} p_i \psi \varphi q_j &= p_i \psi 1_B \varphi q_j = p_i \psi (q_1 p_1 + q_2 p_2) \varphi q_j \\ &= (p_i \psi q_1)(p_1 \varphi q_j) + (p_i \psi q_2)(p_2 \varphi q_j) \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} \end{aligned}$$

Beweis der Äquivalenz der beiden Axiomen-Systeme

Wir haben noch zu zeigen, in einer additiven Kategorie ist Bedingungen

(Add Kat.3)

erfüllt, und die Addition von Morphismen ist durch die Formel (1) gegeben.

Dazu reicht es zu zeigen, die Addition der Morphismen in der Kategorie C ist dieselbe wie diejenige, auf welche sich die Bedingung (Add Kat. 3) bezieht.

Es reicht also zu zeigen, die Morphismen-Addition in C ist gerade die durch Formel (1) gegebene.

Für je zwei Morphismen

$$a_i : A \longrightarrow B \ , \ i = 1,2$$

von C gilt auf Grund der Bilinearität der Morphismen-Komposition

$$p_i \circ (a_1 \oplus 0 + 0 \oplus a_2) \circ q_j = p_i \circ (a_1 \oplus 0) \circ q_j + p_i \circ (0 \oplus a_2) \circ q_j$$
$$=^{121} p_i \circ (a_1 \oplus a_2) \circ q_j$$

also

$$a_1 \oplus 0 + 0 \oplus a_2 = a_1 \oplus a_2$$

also

$$\Sigma_B \circ (a_1 \oplus a_2) \circ \Delta_A = \Sigma_B \circ (a_1 \oplus 0) \circ \Delta_A + \Sigma_B \circ (0 \oplus a_2) \circ \Delta_A$$
$$= (1,1) \circ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1,1) \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (a_1, 0) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (0, a_2) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= a_1 + a_2$$

QED.

Eigenschaften von Morphismen

Seien C eine additive Kategorie,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a'} & B' \\ {\scriptstyle a''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c'} \\ B'' & \xrightarrow{c''} & C \end{array} \qquad \text{(I)}$$

ein Diagramm in C. Betrachten wir

$$A \xrightarrow{f=\begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix}} B' \oplus B'' \xrightarrow{g=(c',c'')} C$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Das Diagramm (I) ist genau dann kommutativ, wenn gilt $g \circ f = 0$.
(ii) Das Diagramm (I) ist genau dann kartesisch, wenn gilt $f = \mathrm{Ker}(g)$.
(iii) Das Diagramm (I) ist genau dann kokartesisch, wenn gilt $g = \mathrm{Koker}(f)$.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$0 = gf \Leftrightarrow 0 = (c', c'') \begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix} = c'a' - c''a'' \Leftrightarrow \text{(I) ist kommutativ.}$$

Zu (ii). Sei (I) kartesich und sei

$$\alpha: X \longrightarrow B' \oplus B''$$

ein Morphismus mit $g \circ \alpha = 0$. Wir haben zu zeigen, α faktorisiert sich auf genau eine Weise über f.

Wir schreiben α in der Gestalt $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$0 = g\alpha = (c', c'') \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \end{pmatrix} = c'\alpha' - c''\alpha''.$$

Weil (I) kartesich ist, gibt es genau einen Morphismus $\tilde{\alpha}: X \longrightarrow A$ mit

---

[121] Für $i \neq j$ steht auf beiden Seiten Null. Für $i = j = 1$ steht auf beiden Seiten $a_1 + 0 = a_1$, und für $i = j = 2$ steht auf beiden Seiten $a_2 + 0 = a_2$

$$a''\tilde{\alpha} = \alpha'' \text{ und } a'\tilde{\alpha} = \alpha',$$

d.h. mit

$$f\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix}\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a'\tilde{\alpha} \\ -a''\tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} = \alpha.$$

Wir haben gezeigt, f = Ker(g).

Sei umgekehrt f = Ker(g) und α': X $\longrightarrow$ B', α'': X $\longrightarrow$ B'' ein Paar von Morphismen mit $c'\alpha' = c''\alpha''$. Mit

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} : X \longrightarrow B' \oplus B''$$

gilt dann

$$g\alpha = (c', c'')\begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} = c'\alpha' - c''\alpha'' = 0.$$

Weil f der Kern von g ist, faktorisiert sich α eindeutig über f, d.h. des gibt genau einen Morphismus

$$\tilde{\alpha}: X \longrightarrow A$$

mit $\alpha = f\tilde{\alpha}$, d.h. mit

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ -\alpha'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ -a'' \end{pmatrix}\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a'\tilde{\alpha} \\ -a''\tilde{\alpha} \end{pmatrix},$$

d.h. mit

$$\alpha' = a'\tilde{\alpha} \text{ und } \alpha'' = a''\tilde{\alpha}.$$

Wir haben gezeigt, (I) ist kartesisch.

Zu (iii). Dies ist gerade die in der dualen Kategorie formulierte Aussage (ii).

QED.

Satz von Krull-Schmidt

Sei C eine additive Kategorie, in der jeder idempotente Morphismus[122] e: A $\longrightarrow$ A zerfällt.[123] Weiter seien

$$A_i \in C$$

von Null verschiedene Objekte, deren Endomorphismen-Ringe lokale Ringe sind und

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_n .$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Jede Zerlegung A in eine direkte Summe kann verfeinert werden zu einer Zerlegung in unzerlegbare[124] direkte Summanden.

(ii) Ist $A \cong B_1 \oplus ... \oplus B_m$ mit B_i unzerlegbar für jedes i, so gilt m = n und bis auf eine Permutation der direkten Summanden ist $B_i \cong A_i$ für jedes i.

---

[122] d.h. es gilt e∘e = e.

[123] d.h. es gibt Morphismen $B \overset{q}{\longrightarrow} A \overset{p}{\longrightarrow} B$ mit qp = e und pq = 1.

[124] Ein Objekt A heißt unzerlegbar, wenn es von Null verschieden ist und aus $A = B \oplus C$ folgt, daß B = 0 oder C = 0 ist.

Beweis. siehe Bass: Algebraic K-theory, Chapter I, §3, Theorem 3.6.
QED.

Abelsche Kategorien

Ein Kategorie C heißt abelsch, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.
(i) C ist additiv.
(ii) Jeder Moprhismus besitzt einen Kern und einen Kokern.
(iii) Für jeden Morphismus f: A $\longrightarrow$ B ist der natürliche Morphismus

$$\mathrm{Koim}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung
Diese Bedingungen sind selbtdual, d.h. das Dual einer abelschen Kategorie ist abelsch.

Exakte Kategorien

(vgl. Keller, Chain complexes and stable categories, Appendix A: Exact categories)

Definition
Sei A eine additive Kategorie. Ein Paar (q, p) von zusammensetzbaren Morphismen der Kategorie A,

$$X \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{p} Z,$$

heißt exakt, wenn q ein Kern von p und p ein Kokern von q ist.
Eine exakte Kategorie ist eine additive Kategorie A zusammen mit einer Menge

$$E = E(A)$$

von exakten Paaren, welche den nachfolgend genannten Bedingungen genügt.
Die Elemente von E heißen dabei Konflationen von A, die ersten Koordinaten q der Konflationen (q,p) heißen Inflationen und die zweiten Koordinaten p heißen Deflationen.

Ex -1: Abgeschlossenheit bei Isomorphismen. Ersetzt man die Objekte X, Y, Z einer Konflation $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ durch isomorphe Objekte, so erhält man wieder eine Konflation.

Ex 0: Das Nullobjekt.

Der identische Morphismus des Null-Objekts ist eine Deflation.

Ex 1: Komposition.

Die Zusammensetzung zweier Deflationen ist eine Deflation.

Ex 2: Basiswechsel.

Für jeden Morphismus f: Z' $\longrightarrow$ Z von A und jede Deflation d: Y $\longrightarrow$ Z gibt es ein kartesiches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array}$$

mit einer Deflation d'.

Ex 2^{op}: Kobasiswechsel.

Für jeden Morphismus f: X $\longrightarrow$ X' und jede Inflation i: X $\longrightarrow$ Y gibt es ein kokartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\longrightarrow} & Y \\ \downarrow f & & f' \downarrow \\ X' & \overset{i'}{\longrightarrow} & Y' \end{array}$$

mit einer Inflation i'.

Beispiel

Seien **A** eine abelsche Kategorie mit genügend vielen projektiven und genügend vielen injektiven Objekten und

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{A}$$

eine volle Teilkategorie, welche additiv ist. Wir nehmen an, **M** ist <u>abgeschlossen gegenüber Erweiterungen</u> in **A** in dem Sinne, daß für jede exakte Sequenz

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

in **A** mit der Eigenschaft, daß A' und A'' isomorph sind zu Objekten von **M**, auch das Objekt A zu einem Objekt von **M** isomorph ist. Bezeichne

$$\mathbf{E}$$

die Klasse der Sequenzen

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0, \qquad (1)$$

in **M**,welche exakt sind in **A**.

Dann ist **M** zusammen mit E als Klasse der Konflationen eine exakte Kategorie.

<u>Axiom Ex -1</u> ist trivialerweise erfüllt: die Sequenz (1) bleibt exakt, wenn die Objekte M', M, M'' durch isomorphe Objekte von M ersetzt werden.

<u>Axiom Ex 0</u> ist ebenfalls trivialerweise erfüllt, weil die Sequenz

$$0 \longrightarrow 0 \overset{1}{\longrightarrow} 0 \overset{1}{\longrightarrow} 0 \longrightarrow 0$$

exakt ist in **A**.

<u>Axiom Ex 1</u>. (Komposition von Deflationen).

Seien j: M $\twoheadrightarrow$ M' und j': M' $\twoheadrightarrow$ M'' zwei Deflationen. Diese sind Bestandteile des folgenden kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} N' & \overset{i'}{\rightarrowtail} & M' & \overset{j'}{\twoheadrightarrow} & M'' \\ & & j \uparrow\uparrow & & \| \\ & & M & \overset{j'j}{\longrightarrow} & M'' \\ & & i \uparrow & & \uparrow \\ N & \rightarrowtail & N & \twoheadrightarrow & 0 \end{array}$$

In **A** können wir die mittlere Zeile dieses Diagramm ergänzen, indem wir den Kern K von j'j hinzufügen. Mit Hilfe der Universalitätseigenschaft des Kerns erhalten wir ein kommutatives Diagramm in **A**:

$$\begin{array}{ccccc} N' & \overset{i'}{\rightarrowtail} & M' & \overset{j'}{\twoheadrightarrow} & M'' \\ \uparrow & & j\uparrow & & \| \\ K & \hookrightarrow & M & \overset{j'j}{\longrightarrow} & M'' \\ \uparrow & & i\uparrow & & \uparrow \\ N & \rightarrowtail & N & \twoheadrightarrow & 0 \end{array}$$

Alle Zeilen dieses Diagramms beschreiben kurze exakte Sequenzen (in **A**). Die mittlere und rechte Spalte des Diagramms beschreiben ebenfalls kurze exakte Sequenzen (in **A**). Nach dem 3×3-Lemme gilt dasselbe auch für die linke Spalte. Weil **M** abgeschlossen ist gegenüber Erweiterungen, ist K isomorph zu einem Objekt von **M**. Wir können deshalb annehmen,

$$K \in \mathbf{M}.$$

Die mittlere Zeile des Diagramms liegt dann aber in **M** und liefert damit eine exake Sequenz von **E**. Also ist j'j eine Deflation, d.h. die Zusammensetzung von Deflationen ist eine Deflation.

Axiom Ex 2. (Basiswechsel)

Seien j: M → M'' eine Deflation und f: N → M'' ein beliebiger Morphismus von M. Nach Voraussetzung gibt es eine Sequenz der Gestalt

$$0 \rightarrow M' \overset{i}{\rightarrowtail} M \overset{j}{\twoheadrightarrow} M'' \rightarrow 0$$

in **M** welche exakt ist in **A**. Wir benutzen den Morphismus f: N → M'' um das folgende Diagramm in **A** zu bilden.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \overset{i}{\rightarrowtail} & M & \overset{j}{\twoheadrightarrow} & M'' \rightarrow 0 \\ & & \| & & f'\uparrow & & \uparrow f \\ 0 & \rightarrow & M' & \overset{i'}{\longrightarrow} & P & \overset{j'}{\longrightarrow} & N \rightarrow 0 \end{array}$$

Dabei sei P ein Faserprodukt[125] von f und j in **A**.

---

[125] in der Kategorie der abelschen Gruppen ist zum Beispiel P = {(m,n)∈M⊕N | j(m)=f(n)}. Allgemein seien

$$p_N: M \times N \longrightarrow N \text{ und } p_M: M \times N \longrightarrow N$$

die beiden Projektionen. Dann ist das Faser-Produkt von f und j gerade der Kern der Differenz

$$f\circ p_N - j\circ p_M.$$

Der Morphismus i' des Diagramms ergibt sich aus dem Morphismus

$$M' \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}} M\times N,$$

dessen Zusammensetzung

$$p_M\circ\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = i \ , \ p_N\circ\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

mit den beiden Projektionen auf M bzw. N gerade i bzw. 0 ist. Durch Zusammensetzen letzterer mit j bzw. f erhält man jeweils Null, d.h.

$$(f\circ p_N - j\circ p_M)\circ\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Deshalb faktorisiert sich $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ über den Kern P von $(f\circ p_N - j\circ p_M)$,

Zeigen wir, die untere Zeile des Diagramms ist ebenfalls exakt in **A**. Weil i ein Monomorphismus ist, gilt dasselbe für i'. Also ist die untere Zeile exakt in M'.
Angenommen die untere Zeile ist nicht exakt in N, d.h. j' ist kein Epimorphismus. Dann ist N/Im(j') nicht das Null-Objekt und man hat einen Epimorpismus

$$F \longrightarrow N/Im(j') \neq 0$$

mit F projektiv. Dieser läßt sich anheben zu einem Morphismus

$$\alpha: F \longrightarrow N,$$

welcher sich nicht über j' faktorisiert (weil sonst $F \longrightarrow N/Im(j')$ der Null-Morphismus wäre). Die Zusammensetzung von $f\circ\alpha$ läßt sich entlang des Epimorphismus j anheben und wir bekommen ein kommutatives Viereck

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & M' \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array}$$

Aus der Universalitätseigenschaft des Faserprodukts ergibt sich nun aber, daß sich α doch über j' faktorisiert. Also muß j' ein Epimorphismus sein.
Aus der Konstruktion von i' ergibt sich, daß

$$j'\circ i' = 0$$

ist. Zum Beweis der Exaktheit der untersen Zeile haben wir noch zu zeigen, daß i' ein Kern von j' ist.

Sei $\alpha: X \longrightarrow P$ ein Morphismus mit $j'\circ\alpha = 0$. Dann ist die Zusammensetzung von

$$X \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{f'} M \qquad (*)$$

mit j gleich Null, d.h. (*) faktorisiert sich über $i: M' \xrightarrow{i'} P \xrightarrow{f'} M$, sagen wir

$$f'\circ\alpha = f'\circ i'\circ\tilde{\alpha}: X \xrightarrow{\tilde{\alpha}} M' \xrightarrow{i'} P \xrightarrow{f'} M$$

d.h.

$$f'\circ(i'\circ\tilde{\alpha} - \alpha) = 0.$$

Trivialerweise ist auch

$$j'\circ(i'\circ\tilde{\alpha} - \alpha) = j'\circ i'\circ\tilde{\alpha} - j'\circ\alpha = 0 + 0 = 0,$$

auf Grund der (Eindeutigkeitsausssage der) Universalitäteigenschaft des Faserprodukts P also

mit der natürlichen Abbildung $P \hookrightarrow M\times N$ und den beiden Projektionen auf M und N zusammen $i'\circ\tilde{\alpha} - \alpha$, also $\alpha = i'\circ\tilde{\alpha}$. Wir haben gezeigt, i' ist Kern von j', d.h. die untere Zeile ist exakt.

Da **M** abgeschlossen ist gegenüber Erweiterungen in **A**, können wir annehmen, P ist ein Objekt von **M**.

Also existiert der Basiswechsel von j mit f in **M** und j' ist eine Deflation.

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}: M' \xrightarrow{i'} Ker(f\circ p_N - j\circ p_M) = P \hookrightarrow M\times N$$

und definiert so den Morphismus i'.

Axiom Ex 2^{op}. (Kobasiswechsel).
Die Bedingung dieses Axioms ist gerade dual zu der von Ex 2. Die Situation des Beispiels ist aber selbstdual, d.h. mit Ex 2 gilt auch Ex 2^{op}.

Eigenschaften exakter Kategorien

Seien A eine exakte Kategorie und E = E(A) die Klasse der Konflationen von A. Dann gelten die folgenden Aussagen (d.h. das Paar (A, E) ist eine exakte Kategorie im Sinne von Quillen).

(i) Für je zwei Objekte X, Z von A ist

$$X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Z \xrightarrow{(0,1)} Z$$

eine Konflation.

(ii) Die Zusammensetzung von Deflationen ist eine Deflation, die Zusammensetzung von Inflationen ist eine Inflation (Ex 1 und Ex 1^{op}).

(iii) Basiswechsel überführt Deflationen in Deflationen, Kobasiswechsel überführt Inflationen in Inflationen (Ex 2 und Ex 2^{op}).

(iv) Der Morphismus

$$d: Y \longrightarrow Z$$

habe einen Kern, und es gebe einen Morphismus

$$e: Y' \longrightarrow Y$$

derart, daß de eine Deflation ist. Dann ist auch d eine Deflation.

(iv)^{op} Der Morphismus

$$i: X \longrightarrow Y$$

habe einen Kokern, und es geben einen Morphimus

$$k: Y \longrightarrow Y'$$

derart, daß ki eine Inflation ist. Dann ist auch i eine Inflation.

Bemerkung

Umgekehrt ergibt sich aus diesen Bedingungen die Gültigkeit der Axiome einer additiven Kategorie: Ex 0 folgt aus (i) mit X = Z = 0. Ex 1 folgt aus (ii). Schließlich folgen Ex 2 und Ex 2^{op} aus (iii).

Beweis. Aussage (iii) gilt trivialerweise. Ebenso der erste Teil von Aussage (ii).
1. Schritt. Sei

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array} \qquad (1)$$

das kartesische Viereck von Ex 2 (mit Deflationen d und d'). Dann ist

$$Y' \xrightarrow{\binom{-d'}{f'}} Z' \oplus Y \xrightarrow{(f,d)} Z$$

eine Konflation.

Dual: Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ \downarrow f & & f' \downarrow \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' \end{array}$$

das kokartesische Viereck von Ex 2^{op}(mit Inflationen i und i'). Das ist

$$X \xrightarrow{\binom{-i}{f}} Y \oplus X' \xrightarrow{(f',i')} Y'$$

eine Konflation.

Beweisen wir die Aussage des ersten Schritt und betrachten die Konflation mit der zweiten Koordinate d, sagen wir

$$X \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{d}{\twoheadrightarrow} Z$$

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & Z' \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array}$$

Weil (1) kartesisch ist, gibt es genau einen Morphismus

$$i': X \longrightarrow Y'$$

mit

$$f'i' = i \text{ und } d'i' = 0.$$

Zeigen wir, i' ist der Kern von d': für jeden Morphismus α: $U \longrightarrow Y'$ mit $d'\alpha = 0$ gilt

$$0 = fd'\alpha = df'\alpha.$$

Deshalb faktorisiert sich $f'\alpha$ über den Kern i von d, sagen wir

$$f'\alpha = i\widetilde{\alpha} = f'i'\widetilde{\alpha}: U \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} X \overset{i}{\rightarrowtail} Y.$$

Es folgt

$$f'(\alpha - i'\widetilde{\alpha}) = 0.$$

Trivialerweise ist außerdem

$$d'(\alpha - i'\widetilde{\alpha}) = d'\alpha - d'i'\widetilde{\alpha} = 0 - 0 = 0.$$

Die Eindeutigkeitsaussage der Universalitäteigenschaft des kartesischen Diagramms impliziert, daß $\alpha - i'\widetilde{\alpha} = 0$ gilt, d.h.

$$\alpha = i'\widetilde{\alpha}.$$

Mit $i = f'i'$ ist auch i' ein Monomorphismus, d.h. $\widetilde{\alpha}$ ist durch $\alpha = i'\widetilde{\alpha}$ eindeutig festgelegt. Wir haben gezeigt,

$$i' = \mathrm{Ker}(d').$$

Wir erhalten aus (1) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\ \| & & \downarrow f' & & f \downarrow \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array} \qquad (2)$$

dessen Zeilen Konflationen sind (weil d' eine Deflation und i' ein Kern von d' ist). Wir gehen jetzt dual vor, wenden Ex 2^{op} (Kobasiswechsel) auf die untere Zeile dieses Diagramm an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{d} & Z \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} & & \| \\ Y' & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{e} & Z \\ {\scriptstyle d'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e'} & & \\ Z' & = & Z' & & \end{array} \tag{3}$$

Das linke obere Quadrat ist kokartesisch. Die Morphismen e und e' sind Kokerne von j bzw. j',

$$e = \mathrm{Koker}(j)$$
$$e' = \mathrm{Koker}(j')$$

(duale Argumentation zu der bei der Konstruktion von (2)). Die beiden oberen Zeilen und die beiden linken Spalten des Diagramms sind somit Konflationen.
Weiter besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix} & \\ Y' & \longrightarrow & Z'\oplus Y \end{array}$$

denn es gilt für die beiden Projektionen $p_{Z'}$, und p_Y von $Z'\oplus Y$:

$$p_{Z'}\circ\begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix}\circ i' = -d'i' = 0 = p_{Z'}\circ\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\circ i$$
$$p_Y\circ\begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix}\circ i' = f'i' = i = p_Y\circ\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\circ i$$

Vergleich dieses Vierecks mit dem kokartesichen Viereck links oben in (3) führt zu einem Morphismus

$$g: E \longrightarrow Z' \oplus Y$$

mit

$$gj' = \begin{pmatrix}0\\1_Y\end{pmatrix}: Y \longrightarrow Z'\oplus Y \text{ und } gj = \begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix}: Y' \longrightarrow Z'\oplus Y$$

Wir wollen zeigen, g ist ein Isomorphismus. Zum Beweis konstruieren wir wie folgt die Umkehrung von g.
Zunächst beachten wir, das linke Viereck von (2) und das linke obere Viereck von (3) setzen sich zu einem kommutativen Viereck zusammen, d.h. $j'f'i' = ji'$, d.h.

$$(j'f' - j)i' = 0: X \longrightarrow E.$$

Die Differenz $j'f' - j$ faktorisiert sich deshalb über den Kokern d' von i':

$$j'f' - j = hd': Y' \xrightarrow{d'} Z' \xrightarrow{h} E.$$

Es reicht zu zeigen,

$$(h, j'): Z' \oplus Y \longrightarrow E$$

ist die Umkehrung von g. Wir haben zu zeigen, die beiden Zusammensetzungen von g und (h, j') sind identische Morphismen. Betrachten wir zunächst

$$g\circ(h, j'): Z'\oplus Y \longrightarrow Z'\oplus Y.$$

und bestimmen die Matrix dieses Morphismus. Es gilt

$$p_{Z'}\circ g\circ(h, j')\circ q_{Z'}\circ d' = p_{Z'}\circ g\circ h\circ d' = p_{Z'}\circ g\circ(j'f' - j) = p_{Z'}\circ\left(\begin{pmatrix}0\\1_Y\end{pmatrix}f' - \begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix}\right)$$
$$= 0 + d'$$
$$= d'$$

$$p_Y\circ g\circ(h, j')\circ q_{Z'}\circ d' = p_Y\circ g\circ h\circ d' = p_Y\circ g\circ(j'f' - j) = p_Y\circ\left(\begin{pmatrix}0\\1_Y\end{pmatrix}f' - \begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix}\right)$$
$$= f' - f'$$
$$= 0$$

Weil d' ein Kokern ist, folgt

$$p_{Z'}\circ g\circ(h, j')\circ q_{Z'} = 1_{Z'},$$
$$p_{Z'}\circ g\circ(h, j')\circ q_{Z'} = 0$$

Weiter ist

$$p_{Z'}\circ g\circ(h, j')\circ q_Y = p_{Z'}\circ g\circ j' = p_{Z'}\circ\begin{pmatrix}0\\1_Y\end{pmatrix} = 0$$

$$p_Y\circ g\circ(h, j')\circ q_Y = p_Y\circ g\circ j' = p_Y\circ\begin{pmatrix}0\\1_Y\end{pmatrix} = 1_Y$$

Zusammen erhalten wir

$$g\circ(h, j') = \begin{pmatrix}1_{Z'} & 0\\0 & 1_Y\end{pmatrix}$$

Betrachten wir die umgekehrte Zusammensetzung $(h, j')\circ g: E \longrightarrow E$. Weil das obere linke Viereck von (3) kokartesisch ist, ist diese Abbildung festgelegt durch ihre Zusammensetzungen mit j und j'. Es gilt

$$(h, j')\circ g\circ j = (h, j')\circ\begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix} = -h\circ d' + j'\circ f' = (j - j'f) + j'f' = j = 1_E\circ j$$

$$(h, j')\circ g\circ j' = (h, j')\circ\begin{pmatrix}0\\1_Y\end{pmatrix} = 0 + j' = 1_E\circ j'$$

Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage der Universalitätseigenschaft des kokartesischen Vierecks links oben in (3) folgt

$$(h, j')\circ g = 1_E$$

Damit ist gezeigt, g ist ein Isomorphismus. Mit (j, e) ist dann aber auch (gj, eg^{-1}) eine Konflation.

$$Y' \xrightarrow{gj} Z' \oplus Y \xrightarrow{eg^{-1}} Z$$

Nun ist

$$gj = \begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix}$$

Zu Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$eg^{-1} = (f, d)$$

d.h.

$$e = (f, d)\circ g$$

Als Morphismen mit der Quelle E sind die beiden Morphismen bereits gleich, wenn ihre Zusammensetzungen mit j und j' gleich sind. Es gilt

$$(f,d)gj = (f, d)\begin{pmatrix}-d'\\f'\end{pmatrix} = -fd' + df' = 0 = ej$$

$$(f,d)gj' = (f, d)\begin{pmatrix} 0 \\ 1_Y \end{pmatrix} = 0 + d = d = ej'$$

Der zweite Teil des ersten Schrittes ergibt sich durch Dualisieren (Ex 1 wurde an keiner Stelle verwendet).

Folgergung: Es gilt (i).

Beweisen wir (i). Nach Ex 0 ist

$$0 \xrightarrow{1} 0$$

eine Deflation. Nun ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{1_Z} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{1} & 0 \end{array}$$

kartesisch ist. Nach Ex 2 ist damit auch $1_Z: Z \longrightarrow Z$ eine Deflation. Weiter ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{-1_X} & X \\ 0\downarrow & & \downarrow 0 \\ Z & \xrightarrow{1_Z} & Z \end{array}$$

kartesich und damit ein Diagramm wie in Ex 2. Auf Grund der Aussage von Schritt 1 gilt also (i).

2. Schritt. Beweis von (iv) und $(iv)^{op}$. Seien

$$Y' \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{d} Z$$

Morphismen, wobei d einen Kern

$$X \xrightarrow{i} Y \quad (= \mathrm{Ker}(d))$$

besitze und die Zusammensetzung de eine Deflation sei. Nach dem ersten Schritt ist jeder Morphismus der Gestalt (f, d) mit einer Deflation d wieder eine Deflation. Insbesondere ist also

$$(d, de): Y \oplus Y' \longrightarrow Z$$

eine Deflation. Dann ist aber auch der um einen Isomorphismus abgeänderte Morphismus

$$(d, 0) = (d, de)\circ\begin{pmatrix} 1_Y & -e \\ 0 & 1_{Y'} \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Deflation. Der Kern dieses Morphismus, d.h.

$$i \oplus 1_{Y'}$$

ist somit eine Inflation. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X\oplus Y' & \xrightarrow{i\oplus 1} & Y\oplus Y' \\ (1,0)\downarrow & & \downarrow(1,0) \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Dieses Diagramm ist kokartesisch.[126] Nach Ex 2^{op} ist i eine Inflation. Weil (d,0) der Kokern von $i \oplus 1_Y$, ist, ist d der Kokern von d. Also ist (i, d) eine Konflation.

Damit sind (iv) und $(iv)^{op}$ bewiesen. Es bleibt also noch (ii) zu beweisen. Der erste Teil von (ii) ist trivial (Ex 1). Es ist also nur nor Ex 1^{op} zu beweisen.

3. Schritt: Beweis von Ex 1^{op}.

Seien

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$$

eine Konflation und $Y \xrightarrow{j} Y'$ eine Inflation. Wir haben zu zeigen, ji ist eine Inflation. Nach Ex 2^{op} haben wir ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & Y' \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ Z & \xrightarrow{k} & Z' \end{array} \qquad (4)$$

mit einer Inflation k. Zu diesem Diagramm gehört auf Grund des ersten Schrittes eine Konflation, die insbesondere ein exaktes Paar ist. Dieses Diagramm ist damit sogar bikartesisch (d.h. gleichzeitig kartesisch und kokartesisch, vgl. Additive Kategorien/Eigenschaften von Morphismen).

Nach dem ersten Schritt (dualer Teil) ist

$$(d',k): Y' \oplus Z \longrightarrow Z'$$

eine Deflation. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y'\oplus Y & \xrightarrow{1\oplus d} & Y'\oplus Z \\ {\scriptstyle (0,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (0,1)} \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array}$$

ist kartesisch: sind $a: W \longrightarrow Y'$, $b: W \longrightarrow Z$, $c: W \longrightarrow Y$ Morphismen mit

$$dc = (0,1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

d.h. $dc = b$, so ist $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}: W \longrightarrow Y'\oplus Y$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit

$(0,1)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = c$ und $(1\oplus d)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Weil das Diagramm kartesisch ist, ist mit d auch

$$1\oplus d: Y'\oplus Y \longrightarrow Y'\oplus Z$$

eine Deflation. Weil die Zusammensetzung von Deflationen wieder Deflationen ergibt (nach Ex 1) ist damit auch der folgende Morphismus eine Deflation.

---

[126] Weil das Diagramm $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$ trivialerweise kokartesisch ist.

$$(d', k)\circ(1\oplus d) = (d', k)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = (d', kd): Y'\oplus Y \longrightarrow Z'$$

Es gilt

$$(d', kd) = (d', d'j) = d'\circ(1_{Y},, j)$$

Nach dem zweiten Schritt ist d' eine Deflation. Zum Beweis der Aussage des dritten Schritts reicht es zu zeigen,

$$ji = Ker(d').$$

Es gilt

$$d'ji = kdi = k\circ 0 = 0.$$

Sei umgekehrt α: W $\longrightarrow$ Y' ein Morphismus mit $d'\circ\alpha = 0$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\alpha} & Y' \\ {\scriptstyle 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ Z & \xrightarrow{k} & Z' \end{array}$$

Weil (4) bikartesisch ist, gibt es genau einen Morphismus β: W $\longrightarrow$ Y mit

$$\alpha = j\circ\beta \text{ und } 0 = d\circ\beta.$$

Auf Grund der zweiten Identität faktoriesiert sich β eindeutig über den Kern von d, d.h. über i, d.h. es gibt genau einen Morphismus γ:W $\longrightarrow$ X mit

$$\beta = i\circ\gamma.$$

Es folgt $\alpha = j\circ\beta = j\circ i\circ\gamma$, d.h.

$$\alpha = ji\gamma.$$

Wir haben noch zu zeigen, γ ist durch die letzte Bedingung eindeutig festgelegt. Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt wegen di = 0 insgesamt

$$\alpha = j(i\gamma) \text{ und } 0 = d(i\gamma)$$

Durch diese beiden Bedingungen ist aber gerade β definiert, d.h. es gilt dann

$$\beta = i\gamma.$$

Durch diese Bedingung ist aber mit β auch γ eindeutig bestimmt.
QED.

Topologische Räume

Überlagerungen

Unverzweigte Überlagerungen

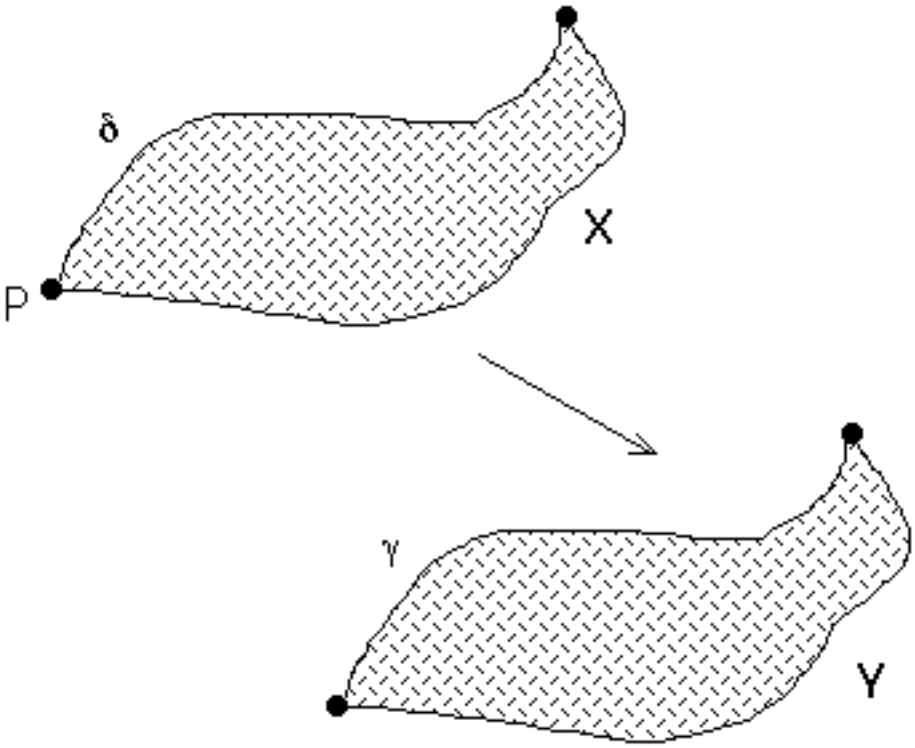
Eine unverzweigte Überlagerung ist eine stetige Abbildung f: X $\longrightarrow$ Y topologischer Räume mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt y $\in$ Y eine offene Umgebung V $\subseteq$ Y von y , für welche das vollständige Urbild

$$f^{-1}(V) = \bigcup U_i$$

in eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen U_i zerfällt, so daß die Einschränkungen $f|_{U_i} : U_i \longrightarrow$ V Homöomorphismen sind.

Das Urbild einer Kurve in V ist die disjunkte Vereinigung von Kurven in $f^{-1}(V)$, von denen jede Homöomorph auf die gegebene Kurve abgebildet wird. Fixiert man auf einer dieser Kurven einen Punkt, so ist durch diesen Punkt die zugehörige Kurve vollständig festgelegt. Die Überlagerungen haben deshalb die folgenden Homotopie-Liftungseigenschaften.

1. Für jede Kurve γ in Y und jeden Punkt P $\in$ X, der in den Anfangspunkt von γ abgebildet wird, gibt es genau eine Kurve δ in X mit dem Anfang in P, deren Zusammensetzung mit f gerade γ ist. Diese Kurve heißt Anhebung von γ mit dem Anfang P.
2. Anhebungen homotoper Kurven mit demselben Anfang sind homotop. Die Homotopie der beiden Anhebungen kann so gewählt werden, daß deren Zusammensetzung mit f gerade die gegebene Homotopie der beiden Ausgangskurven ist.



Unverzweigte Überlagerungen und π_1(Y, y)-Mengen

Sei

(Y, y)

ein punktierter topologischer Raum mit Y wegeweise zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Man beachte, als Realisierung einer simplizialen Menge hat BC letztere Eigenschaft: das liegt im wesentliche daran, daß sich jedes Standard-Simplex auf jede seiner Ecken kontrahieren läßt (zu jeden Punkt von BC betrachte man den zugehörigen offenen Simplex-Stern einer geeigneten baryzentrischen Unterteilung, d.h. die Vereinigung aller offenen Simplexe, die diesen Punkt enthalten).

Für jede (unverzweigte) Überlagerung $f: E \longrightarrow Y$ operiert dann die Homotopie-Gruppe

$$\pi := \pi_1(Y, y)$$

auf der Faser $E(y) := f^{-1}(y)$ über y, d.h. wir erhalten einen Funktor

$$\text{Überlagerungen von } (Y,y) \longrightarrow \pi\text{-Sets}, E \mapsto E(y). \qquad (1)$$

Dies ist eine Äquivalenz von Kategorien. Der Funktor ist treu, weil Überlagerunen lokale Homöomorphismen sind (der Ort auf dem zwei Morphismen gleich sind, ist dadurch offen und abgeschlossen). Der Funktor ist voll wegen der Eindeutigkeitsaussage der Homotopie-Liftungseigenschaft für Überlagerungen. Es reicht also zu zeigen, jede π-Menge ist isomorph zu einer π-Menge, die im Bild des Funktors liegt.

Zum Beweis dieser letzteren Aussage benötigt man die den Begriff der universellen Überlagerung.

Universelle Überlagerungen

Die universelle Überlegerung

$$\tilde{p}: \tilde{Y} \longrightarrow Y$$

des topologischen Raums Y (siehe oben) besteht alsMenge $\tilde{Y}$ aus den Homotopie-Klassen [γ] aller Wege

$$\gamma: I \longrightarrow Y$$

von Y mit dem Anfang im Basispunkt y von Y. Als Homotopien betrachtet man solche mit fest gewählten Anfangs- und Endpunkten. Die Bündelabbildung f ist dann gerade die Abbildung

$$\tilde{p}: \tilde{Y} \longrightarrow Y, [\gamma] \mapsto \gamma(1),$$

welche jeder Homotopie-Klasse den gemeinsamen Endpunkt der Wege aus dieser Klasse zuordnet. Weil Y wegeweise zusammenhängend ist, ist diese Abbildung surjektiv. Weil Y lokal einfach zusammenhängend ist, ist diese Abbildung ein lokaler Homöomorphismus und sogar eine Überlagerung.
Nach Konstruktion besteht die Faser über y gerade gearde aus den Homotopie-Klassen geschlossener Wege in y, d.h.

$$\tilde{Y}(y) = \pi = \pi_1(Y, y)$$

ist die fundamentale Gruppe. Die Fasern von $\tilde{p}$ sind damit als π-Mengen isomorph zu π.

Grundlegende Eigenschaft der universellen Überlagerung

Für jede Überlagerung $f: E \longrightarrow Y$ und jeden Punkt $p \in E$ mit $f(p) = y$ gibt es genau eine stetige Abbildung

$$\tilde{Y} \longrightarrow E, [\gamma] \mapsto \text{Anhebung } \delta \text{ von } \gamma \text{ mit Anfang in } p \mapsto \delta(1),$$

für welche das folgende Diagramm punktierter topologischer Räume kommutativ ist.

$$(\widetilde{Y},0) \longrightarrow (E,p)$$

$$\widetilde{p}\searrow\swarrow f \qquad , 0 := \text{Klasse des konstanten Wegs in y.}$$

$$(Y,y)$$

Mit anderen Worten, die universelle Überlagerung ist gerade initiales Objekt in der Kategorie der punktierten Überlagerungen von (Y, y).

Zum Beweis der oben behautpteten Äquivalenz konstruieren wir den quais-invesen Funktor

$$\pi\text{-Sets} \longrightarrow \text{Überlagerungen von Y.}$$

Wir müssen also für jede π-Menge M eine geeignete Überlagerung finden. Dazu reicht es für jedes Orbit von M eine solche Überlagerung zu finden: die disjunkte Vereinigung der zugehörigen Überlagerungsräume liefert dann die gesuchte Überlagerung im allgemeinen Fall.

Wir könne also annehmen, daß M aus nur einem Orbit besteht, d.h. π operiert transitiv auf M. Dann hat aber M bis auf Isomorphie die Gestalt

$$M = \pi/U \text{ mit einer Untergruppe } U \subseteq \pi.$$

(man fixiere ein m∈M, betrachte die zugehörige Orbitalabbildung $\pi \longrightarrow M$, $g \mapsto gm$, welche surjektiv ist, und wähle für U den Stabilisator von m). Die Operation von π auf den Faser der universellen Überlagerung definiert eine solche der Untergruppe U. Wir setzen

$$E := \widetilde{Y}/U.$$

Weil U die Fasern von $\widetilde{Y}$ in sich abbildet, induziert die Bündel-Abbildung $\widetilde{p}$ eine Abbildung

$$f: E \longrightarrow Y.$$

Die Fasern dieser Abbildung sind als π-Mengen isomorph zu π/U = M. Wir erhalten so eine Überlagerung von Y (die durch Identifikation gewisser Blätter der universllen Überlagerung entsteht) deren Bild bei (1) bis auf Isomorphie gerade die gegebene π-Menge M ist.

Faserbündel

Das Serre-Faserbündel zu einer stetigen Abbildung

Sei

$$g: E \longrightarrow B$$

eine stetige Abbildung topologischer Räume E und B. Weiter sei

$$B^I := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Top}}(I, B),\ I := [0,1] \subseteq \mathbb{R},$$

die Menge der Wege in B. Wir versehen diese Menge mit der kompakt-offenen Topologie, d.h. die endlichen Durchschnitte der Mengen der Gestalt

$$\mathrm{Hom}((I,K), (B,U)) := \{f \in B^I : f(K) \subseteq U\}$$

mit $K \subseteq I$ kompakt und $U \subseteq B$ offen sollen eine Umgebungsbasis von B^I bilden. Weiter sei

$$P_g := \{(e, \gamma) \in E \times B^I \mid g(e) = \gamma(0)\}$$

die Menge der Paare (e, γ) bestehend aus einem Punkt $e \in E$ und einer Weg in B, der im Bild von e anfängt. Wir versehen P_g mit der Unterraum-Topologie von $E \times B^I$ und nennen diesen Raum Wege-Raum.

Dann gilt:

(i) Die Abbildung

$$\pi: P_g \longrightarrow B,\ (e, \gamma) \mapsto \gamma(1),$$

ist stetig.

(ii) Der Raum P_g ist homotopie-äquivalent zu E.

(iii) Die Abbildung π ist ein Serre-Faserbündel, dessen Faser

$$F(g, b) = \{(e, \gamma) \in E \times B^I \mid g(e) = \gamma(0) \text{ und } \gamma(1) = b\}$$

im Punkt $b \in B$ auch Homotopie-Faser von g in b heißt.

(iv) Insbesondere besteht eine exakte Homotopie-Sequenz

$$\ldots \to \pi_{i+1}(B,b) \to \pi_i(F(g,b), \mathfrak{e}) \to \pi_i(E,e) \xrightarrow{g_*} \pi_i(B,b) \to \ldots$$

mit $\mathfrak{e} = (e, \overline{b})$, wobei $\mathfrak{b}$ den konstanten Weg in $\overline{b}$ bezeichnet.

Beweis. Zu (i). Sei $U' \subseteq B$ eine offene Menge und $(e,\gamma) \in P_g$ ein Punkt mit

$$b := \pi(e,\gamma) \in U'.$$

Wir müssen eine offene Umgebung von (e,γ) finden, die vollständig in U' abgebildet wird.

Nach Voraussetung liegt der Endpunkt von γ in U'. Es gibt also ein abgeschlossenes Teilintervall I' von I mit

$$1 \in I' \subseteq I \text{ und } \gamma(I') \subseteq U'.$$

Die Menge

$$W := \mathrm{Hom}((I,I'), (B,U'))$$

eine offene Teilmenge von B^I, welche die gegebene Kurve γ enthält,

$$\gamma \in W.$$

Also gilt

$$(e,\gamma) \in W'' := (E \times W) \bigcap P_g.$$

Es reicht zu zeigen, das Bild bei π der offenen Umgebung W'' von (e,γ) liegt vollständig in U'. Für $(e', \gamma') \in W''$ gilt aber $\gamma' \in W$, und nach Definition von W ist

$$\pi(e',\gamma') = \gamma'(1) \in \gamma'(I') \subseteq U'.$$

Zu (ii). Betrachten wir die Abbildung

$$H: P_g \times I \longrightarrow P_g,\ (e, \gamma, t) \mapsto H_t(e, \gamma) := (e, \gamma_t),\ (t \in I),$$

mit

$$\gamma_t(s) = \gamma(st).$$

Wir werden weiter unten zeigen, daß diese Abbildung stetig ist. Es handelt sich also um eine Homotopie.

Für $t = 1$ ist $H_1: P_g \longrightarrow P_g$ die identische Abbildung. Für $t = 0$ ist das Bild von H_t gleich

$$\mathrm{Im}(H_0) = \{ (e, \overline{p(e)}\} \cong E,$$

wenn $\overline{b}$ für $b \in B$ den constanten Weg im Punkt b bezeichnet. Die Identifikation von E mit dieser Menge definiert eine Einbettung

$$E \hookrightarrow P_g, e \mapsto (e, \overline{p(e)}),$$

und die Einschränkung von H_t auf E ist für jedes t die identische Abbildung.[127]
Insbesondere ist die Zusammensetzung

$$\mathrm{Id}: E \hookrightarrow P_g \xrightarrow{H_0} E$$

gerade die identische Abbildung. Die umgekehrte Zusammensetzung

$$P_g \xrightarrow{H_0} E \hookrightarrow P_g$$

ist nach Konstruktion homotop zur identischen Abbildung. Mit anderen Worten, die Abbildungen $E \hookrightarrow P_g$ und $H_0: P_g \longrightarrow E$ sind homotopie-invers.
Zur Stetigkeit der Abbildung H.
Wir haben zu zeigen, das Urbild einer offenen Menge von P_g bei H ist offen. Zum Beweis können wir annehmen, die offene Menge von P_g hat die Gestalt

$$W := (U'' \times \mathrm{Hom}((I,I'), (B, U')) \bigcap P_g$$

mit $U'' \subseteq E$ offen, $U' \subseteq B$ offen und $I' \subseteq I$ ein abgeschlossenes Teilintervall.
Sei

$$(e', \gamma', t') \in H^{-1}(W), \qquad (1)$$

d.h.

$$e' \in U'' \text{ und } \gamma'_t,(I') \subseteq U', \text{ d.h. } \gamma'(t'I') \subseteq U',$$

d.h.

$$e' \in U'' \text{ und } t'I' \subseteq \gamma'^{-1}(U').$$

Betrachten wir die stetige Abbildung

$$\delta: I \times I' \longrightarrow I \xrightarrow{\gamma} B, (t, s) \mapsto ts \mapsto \gamma'(ts).$$

Das vollständige Urbild von U' bei δ ist eine offene Teilmenge von I×I', welche die Menge {t'}×I' vollständig enthält. Für jedes $s \in I'$ gibt es zwei positive reelle Zahlen δ(t) und ε(t) mit

$$x \in U_{\varepsilon(t)}(t') \times U_{\delta(t)}(t) \subseteq \delta^{-1}(U').$$

Weil I' kompakt ist, wird I' von endlich vielen der $U_{\delta(t)}(t)$ überdeckt, sagen wir

$$I' \subseteq U_{\delta(t_1)}(t_1) \bigcup \ldots \bigcup U_{\delta(t_r)}(t_r).$$

Wir setzen $\varepsilon := \min(\varepsilon(t_1), \ldots, \varepsilon(t_r))$ und erhalten

$$U_\varepsilon(t') \times I' \subseteq \delta^{-1}(U'),$$

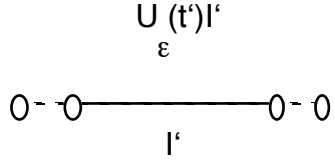
also

$$U_\varepsilon(t')I' \subseteq \gamma^{-1}(U').$$

---

[127] Weil für konstante Wege γ gilt $\gamma_t = \gamma$ für alle t.

Das offene Teilintervall $U_\varepsilon(t')I'$ von I enthält das offene Teilintervall $U_{\varepsilon/2}(t')I'$ in seinem Innern, und der Abschluß des letzteren liegt vollständig in ersteren.



Wir können also durch Verkleinern von ε erreicht, daß sogar

$$I'' := \overline{U_\varepsilon(t')I'} \subseteq \gamma'^{-1}(U')$$

gilt. Damit ist

$$(e', \gamma', t') \in (U'' \times \mathrm{Hom}((I, I''), (B,U') \bigcap P_g) \times U_\varepsilon(t') =: W'.$$

Es reicht zu zeigen, die offene Umgebung W' von (e', γ', t') liegt ganz in $H^{-1}(W)$. Für

$$(e'', \gamma'', t'') \in W'$$

gilt (trivialerweise $e'' \in U''$ und)

$$\gamma''(U_\varepsilon(t')I') \subseteq U'$$

und wegen $t'' \in U_\varepsilon(t')$ erst recht

$$\gamma''(t''I') \subseteq U',$$

also $\gamma''_{t''}(I') \subseteq U'$, also

$$H(e'', \gamma'', t'') = (e'', \gamma''_{t''}) \in (U'' \times \mathrm{Hom}((I,I'), (B,U')) \bigcap P_g = W,$$

also $(e'', \gamma'', t'') \in H^{-1}(W)$.

Zu (iii). Wir haben zu zeigen, π besitzt die Homotopie-Liftungseigenschaft für jeden Kubus

$$X = I^n \text{ , } n = 0, 1, 2, 3, ...,$$

d.h. jedes kommutative Diagramm stetiger Abbildungen der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X\times\{0\} & \xrightarrow{\beta} & P_g \\ \bigcap & & \downarrow\pi \\ X\times I & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

läßt sich kommutativ durch eine stetige Abbildung $X \times I \longrightarrow P_g$ ergänzen. Für $n = 0$ bedeutet dies, jede Kurve läßt sich entlang π anheben. Sei

$$\alpha: I \longrightarrow B$$

eine Kurve in B und

$$(e, \delta) \in P_g,$$

ein Punkt, dessen Bild in B der Anfang von α ist,

$$\pi(e, \delta) = \delta(1) = \alpha(0).$$

Weil δ ein Weg von g(e) nach $\delta(1) = \alpha(0)$ ist, ist die Zusammensetzung $\alpha_t \circ \delta$ wohldefiniert[128] und ein Weg von g(e) nach $\alpha(t)$. Deshalb ist

$$\tilde{\alpha}: I \longrightarrow P_g,\ t \mapsto (e, \alpha_t \circ \delta),$$

ein Kurve in P_g mit

$$\pi(\tilde{\alpha}(t)) = \pi((e, \alpha_t \circ \delta)) = (\alpha_t \circ \delta)(1) = \alpha_t(1) = \alpha(t),$$

d.h. $\tilde{\alpha}$ ist eine Anhebung von α, deren Anfang im vorgegebenen Punkt (e, δ) liegt.
Betrachten wir jetzt den Fall $n > 0$. Für $x \in X = I^n$ besitzt der Weg

$$\alpha|_{\{x\}\times I}: I \xrightarrow{\cong} \{x\}\times I \longrightarrow B$$

eine Anhebung mit dem Anfang im vorgegebenen Punkt $\beta(x, 0) = (e, \delta)$, nämlich die Anhebung

$$\{x\}\times I \longrightarrow P_g,\ (x, t) \mapsto (e, \alpha_{x,t} \circ \delta),$$

wobei $\alpha_{x,t}$ den Weg $I \longrightarrow B$, $s \mapsto \alpha(x, st)$, bezeichne. Die gesuchte kommutative Ergänzung ist die Abbildung

$$X \times I \longrightarrow P_g,\ (x, t) \mapsto (e(x), \alpha_{x,t} \circ \delta(x)),$$

wobei e(x) und $\delta(x)$ die Koordinaten von $\beta(x, 0) = (e(x), \delta(x))$ seien.
Das obere linke Dreieck ist kommutativ, weil für $t = 0$ gilt

$$(e(x), \alpha_{x,t} \circ \delta(x)) = (e(x), \delta(x)) = \beta(x, 0).$$

Das untere rechte Dreieck ist kommutativ wegen

$$\pi(e(x), \alpha_{x,t} \circ \delta(x)) = (\alpha_{x,t} \circ \delta(x))(1) = \alpha_{x,t}(1) = \alpha(x, 1 \bullet t) = \alpha(x,t).$$

Zu (iv).
Die lange Homotopie Sequenz des betrachteten Serre-Faserbündels hat die Gestalt

$$\ldots \to \pi_{i+1}(B,b) \to \pi_i(F(g,b), e) \to \pi_i(P_g, e) \xrightarrow{g_*} \pi_i(B,b) \to \ldots$$

Wegen (ii) ist P_g homotopie-äquivalent zu E, d.h. wir können in der Sequenz P_g überall durch E ersetzen.
QED.

---

[128] Wir definieren die Zusammensetzung von α_t und δ in einer etwas von der üblichen Definitin abweichenden Art:
$\alpha_t \circ \delta$ sei die stetige Abbildung $I \longrightarrow B$, die auf dem Teilintervall $[0, 1-t]$ die Zusammensetzung

$$[0, 1-t] \twoheadrightarrow I \xrightarrow{\delta} B,\ s \mapsto \frac{s}{1-t} \mapsto \delta\left(\frac{s}{1-t}\right)$$

sei und auf $[1-t, 1]$ die Zusammensetzung

$$[1-t, 1] \twoheadrightarrow I \xrightarrow{\alpha_t} B,\ s \mapsto \frac{s-1+t}{t} \mapsto \alpha_t\left(\frac{s-1+t}{t}\right).$$

Die Definition ist gerade so gewählt, daß $\alpha_t \circ \delta = \delta$ gilt im Fall $t = 0$.

Quasi-Fibrationen

Definiiton

Eine stetige Abbildung g: E $\longrightarrow$ B topologischer Räume heißt Quasi-Fibration oder auch Quasi-Faserung, wenn die durch g induzierten Abbildungen

$$p_x : \pi_i(E, g^{-1}(x), y) \longrightarrow \pi_i(B, x)$$

Isomorphismen sind für jedes $x \in B$, jedes $y \in g^{-1}(x)$ und jedes $i \geq 0$.

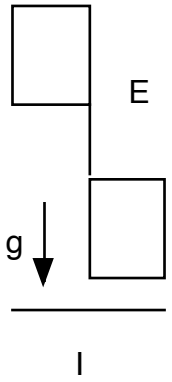
Beispiel 1: Serre-Faser-Bündel

Jede Faserung im Sinne von Serre (Serre-Faser-Bündel) ist eine Quasi-Faserung. Man verwendet die Tatsache, daß Serre-Faser-Bündel die Homotopie-Liftungseigenschaft für beliebige endliche Polyeder besitzen.

Weil man stetige Bilder von Sphären anheben kann, sind die Abbildungen surjektiv. Weil man Homotopien auf einer Sphäre anheben kann, sind die Abbildungen injektiv.

Beispiel 2: zwei verbundene Quadrate

Sei B = I und $E \subseteq \mathbb{R}^2$ die Teilmenge die aus zwei benachbarten Rechtecken entstanden ist, die man gegeneinander in Richtung der y-Achse verschoben und durch eine vertikale Strecke verbunden hat.



Wir fassen das Intervall I als Teilmenge der x-Achse auf. Die Abbildung

$$g: E \longrightarrow I$$

sein die Projektion auf die x-Achse. Dies ist eine Quasi-Faserung, besitzt jedoch nicht die Homotopie-Liftungseigenschaft für Kuben: Die identische Abbildung

$$\gamma: I \longrightarrow I$$

läßt sich nicht über g faktorisieren, denn für jede Zusammensetzung

$$I \longrightarrow E \longrightarrow B$$

gibt es ein offenes Teilintervall von I, (welches der Verbindungsstrecke zwischen den Rechtecken entspricht und) auf welchem diese Zusammensetzung konstant ist. Die identische Abbildung besitzt diese Eigenschaft nicht.

Die exakte Sequenz zu einer Quasi-Faserung

Für jede Quasi-Fibration g: E $\longrightarrow$ B und Punkte $x \in b$, $y \in g^{-1}(x)$ besteht die folgende lange exakte Homotopie-Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(B, x) \longrightarrow \pi_i(g^{-1}(x), y) \longrightarrow \pi_i(E, y) \longrightarrow \pi_i(B,x) \longrightarrow \ldots$$

Es ist gerade die langen exakte Homotopie-Sequenz des Paares $(E, g^{-1}(x))$, in welcher man die relative Homotopie-Gruppe $\pi_i(E, g^{-1}(x), y)$ durch $\pi_i(B, x)$ ersetzt hat.

Ein Kriterium für Quasi-Faserung

Sei $g: E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) g ist eine Quasi-Faserung.

(ii) Für jeden Punkt $x \in B$ induziert die natürliche Abbildung

$$g^{-1}(x) \longrightarrow F(g, x),\ y \mapsto (y, \overline{g(y)}, x),$$

der Faser über x in die Homotopie-Faser einen Isomorphismus auf den Homotopie-Gruppen. Dabei bezeichne $\overline{g(y)}$ den konstanten Weg im Punkt g(y).

Beweis. Wir beliebige $x \in B$ und $y \in g^{-1}(x)$ betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(x),y) & \longrightarrow & \pi_i(E;y) & \longrightarrow & \pi_i(E,g^{-1}(x),y) & \longrightarrow \ldots \\
& \| & & \| & & \alpha\downarrow & \\
\ldots \longrightarrow & \pi_i(g^{-1}(x),y) & \longrightarrow & \pi_i(E;y) & \longrightarrow & \pi_i(B,x) & \longrightarrow \ldots \\
& \beta\downarrow & & \| & & \| & \\
\ldots \longrightarrow & \pi_i(F(g,x),\tilde{y}) & \longrightarrow & \pi_i(E,y) & \longrightarrow & \pi_i(B,x) & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

Die obere Zeile sei gerade die lange exakte Homotopie-Sequenz des Paares $(E, g^{-1}(x))$, und die untere Zeile die lange exakte Homotopie-Sequenz der stetigen Abbildung g.

Die rechte obere vertikale Abbildung α sei durch g induziert. Die linke untere vertikale Abbildung β komme von der in (ii) beschriebenen natürlichen Einbettung der Faser in die Homotopie-Faser.

(i) $\Rightarrow$ (ii).Sei g eine Quasi-Faserung. Dann ist die mittlere Zeile des Diagramms ebenfalls exakt. Nach dem Fünfer-Lemma ist dann aber β ein Isomorphismus, d.h. es gilt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Genüge g der Bedingung (ii). Dann ist β ein Isomorphismus, d.h. die mit der unteren ist auch die mittlere Zeile des Diagramms exakt. Dann muß aber auch α ein Isomorphismus sein, d.h. g ist eine Quasi-Faserung.
QED.

Ausgezeichnete Mengen

Sei $g: E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung. Eine Teilmenge $B' \subseteq B$ heißt ausgezeichnet, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) $B' \subseteq g(E)$.

(ii) Die Einschränkung $g^{-1}(B') \longrightarrow B'$ ist eine Quasi-Faserung.

Kriterium für Quasifaserungen

Seien $g: E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von ausgezeichneten offenen Teilmengen von B mit

1. $B = \bigcup_{i \in I} U_i$

2. Für jeden Punkt $x \in U_i \bigcap U_j$ gibt es ein U_ℓ mit $x \in U_\ell \subseteq U_i \bigcap U_j$.

Dann ist g eine Quasi-Faserung.
Beweis. siehe Dold, A., Thom, R.: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, Satz 2.2
QED.

Folgerung 1

Seien $g: E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung und U, V, $U \bigcap V$ ausgezeichnete offene Teilmengen von B. Dann ist auch $U \bigcup V$ ausgezeichnet.

Vergleiche Dold, A., Thom, R.: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, Kollar von Satz 2.2.

Folgerung 2

Seien $g: E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung und B direkter Limes von Räumen und Inklusionen

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$$

die dem ersten Trennungsaxiom genügen (Punkte sind abgeschlossen). Falls jeder der Räume B_i ausgezeichnet ist, so ist g eine Quasi-Faserung.

Vergleiche Dold, A., Thom, R.: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, Kollar von Satz 2.15.

Simpliziale Mengen

Definition

Sei

$$\Delta$$

die Kategorie, deren Objekte die Mengen

$$[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$$

für nicht-negative ganze n sind und deren Morphismen die monoton steigenden Abbildungen

$$[m] \longrightarrow [n].$$

Eine simplizialen Menge ist ein kontravarianter Funktor auf Δ mit Werten in Ens, d.h. ein Funktor

$$X: \Delta^{op} \longrightarrow \text{Ens}.$$

Die Elemente von $X_n := X([n])$ heißen n-Simplexe von X oder auch Simplexe der Dimension n von X.

Realisierung, Direkte Produkte

Nicht-entartete Simplexe

Seien X eine simpliziale Menge und $\sigma \in X_n$ ein n-Simplex von X. Dann heißt σ entartetes Simplex von X,[129] wenn es eine schwach wachsende Surjektion $f:[n] \to [n']$ mit $n>n'$ und ein n'-Simplex $\sigma' \in X_{n'}$ gibt mit $\sigma=X(f)\sigma'$. Andernfalls heißt σ nicht-entartet. Die Menge aller nicht-entarteten n-Simplexe von X wird mit $X_{(n)}$ bezeichnet,

$$X_{(n)} := \{\sigma \in X_n \mid \sigma \text{ nicht entartet}\}.$$

Bemerkung

Ist $\sigma \in X_n$ ein nicht-entartetes Simplex und gilt $\sigma=X(f)\sigma'$ für irgendein σ' und irgendein f, dann muß f eine Injektion sein.

Beweis. Ist f keine Injektion, so exitiert eine Zerlegung

$$f: [n] \overset{f'}{\twoheadrightarrow} [\ell] \overset{g}{\hookrightarrow} [n']$$

in eine Surjektion f' mit $\ell < n$ und eine Injektion g. Mit $\sigma''=X(g)\sigma'$ gilt dann $\sigma=X(f')\sigma''$ im Widerspruch zu der Annahme, daß σ nicht-entartet sein soll.

Beispiele

(i) Ist $\tilde{X}$ die simpliziale Menge zu den Verheftungsdaten X und ist $(\sigma, g:[n]\to[n']) \in \tilde{X}_n$ ein n-Simplex, so gilt $(\sigma,g) = \tilde{X}(g)(\sigma, id)$, d.h. die nicht-entarteten Simplexe von $\tilde{X}$ sind gerade diejenigen der Gestalt (σ,id). Insbesondere kann man X mit dem Teilfunktor der nicht-entarteten Simplexe von $\tilde{X}$ identifizieren (über den strend wachsenden Abbildungen). Insbesondere ist die Bedingung, daß die nicht-entarteten Simplexe einen Teilfunktor definieren erfüllt. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die zugehörige simpliziale Menge gerade die ursprünglich gegebene ist.

(ii) Sei G eine Gruppe. Die nicht-entarteten Simplexe von BG sind dann gerade diejenigen tupel $(g_1,...,g_n)$ bei denen alle Koordinaten von e verschieden sind.

(iii) Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, daß die Realisierung |X| einer simplizialen Menge X gerade die disjunkte Vereinigung der nicht-entarteten offenen Simplexe ist. Dazu benötigen wir zunächst einige Hilfssätze.

---

[129] Äquivalent könnte man fordern, σ kommt von einem Simplex kleinerer Dimension,

$$\sigma = X(f)\sigma' \text{ mit } \dim\sigma > \dim\sigma'$$

und irgendeiner monotonen Abbildungf:$[n] \longrightarrow [m]$. Man kann nämlich f in die Zusammensetzung aus einer Surjektion und einer Injektion zerlegen, sagen wir

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{f} & [m] \\ & f' \searrow \quad \nearrow i' & \\ & [m'] & \end{array}$$

und es gilt

$$\sigma = X(f)(\sigma') = X(i'\circ f')(\sigma') = X(f')(X(i')(\sigma')) = X(f')(\sigma'')$$

mit $\sigma'' := X(i')(\sigma')$. Weil i' injektiv ist, gilt außerdem $m' \le m < m$.

Jedes Simplex kommt von genau einem nicht-entarteten

Seien X eine simpliziale Menge und $\sigma \in X_n$ ein Simplex. Dann gibt es genau eine schwach wachsende Surjektion $f:[n] \twoheadrightarrow [n']$ und genau ein nicht-entartetes Simplex $\sigma' \in X_{n'}$ mit $\sigma = X(f)\sigma'$.

Bemerkung

Die Surjektion $f:[n] \twoheadrightarrow [n']$ läßt sich als Zusammensetzung der Entartungen ε_i auffassen (welche das i-te mit dem (i+1)-Element der geordneten Menge identifizieren), sagen wir

$$f = \varepsilon_{j_1} \circ ... \circ \varepsilon_{j_p} \quad \text{mit } p = n - n'.$$

Dabei können wir die Reihenfolge der Entartungen noch so wählen, daß gilt

$$0 \le j_1 < ... < j_p < n$$

(wir identifizieren die großen Elemente zuerst und danach die kleinen). Durch diese Zusatzbedingung ist die Folge der j_v eindeutig festgelegt.

Beweis. Nach Definition des entarteten Simplex gibt es zu jedem $\sigma \in X_n$ ein Paar $(\sigma', f':[n]\to[n'])$ mit den angegebenen Eigenschaften[130].

Angenommen, es gibt ein zweites solches Paar $(\sigma'', f'':[n]\to[n''])$.

$$\begin{array}{ccc} \sigma'' & & [n''] \\ & & f''\uparrow\!\!\twoheadrightarrow \\ & [n] & \xrightarrow{f} [n'] \qquad fg = id. \\ \sigma & \xleftarrow[g]{} & \sigma' \end{array}$$

Sei $g:[n']\to[n]$ ein monoton wachsender Schnitt von f, so daß $f\circ g:[n']\to[n']$ die identische Abbildung ist. Dann gilt

$$\sigma' = X(id)\sigma' = X(f\circ g)\sigma' = X(g)\circ X(f)\sigma' = X(g)\sigma$$

also

$$(*) \qquad \sigma' = X(g)\circ X(f'')\sigma'' = X(f''\circ g)\sigma''.$$

Da das Simplex σ' nach Voraussetzung nicht entartet ist, muß $f''\circ g:[n']\to[n'']$ injektiv sein (auf Grund der Bemerkung nach der Definition des entarteten Simplexes). Insbesondere gilt $n' \le n''$. Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch die umgekehrte Ungleichung, d.h. es ist $n'=n''$. Als injektive Abbildung ist damit $f''\circ g:[n']\to[n'']$ sogar bijektiv, also

$$f''\circ g = id.$$

Wegen (*) ist damit $\sigma'=\sigma''$. Da außerdem $f''\circ g = id$ für jeden (monotonen) Schnitt g von f gilt, muß auch $f=f''$ sein.

Q.E.D.

---

[130] Falls σ nicht-entartet ist nehmen man (σ, id). Falls das σ' in der Definition der entarteten Simplexe ebenfalls entartet ist, kann man dieses σ' durch eines kleinerer Dimension ersetzen. Dies ist nur endlich oft möglich, d.h. nach endlich vielen Schritten erhält man ein σ', welches nicht-entartet ist.

Erhaltung des nicht-entarteten Repräsentanten
Seien

$$f:[n] \twoheadrightarrow [m] \text{ und } g:[n] \twoheadrightarrow [n']$$

schwach wachsende Surjektionen und

$$\sigma \in X_n \,, \tau \in X_m \,, \sigma' \in X_{n'}$$

Simplexe mit

$$\sigma = X(f)\tau \,, \quad \sigma = X(g)\sigma'$$

und

τ nicht-entartet.

$$\begin{array}{ccc} \sigma & & \tau \\ & f & \\ [n] & \twoheadrightarrow & [m] \\ \Downarrow g & \nearrow h & \\ [n'] & & \\ \sigma' & & \end{array}$$

Dann existiert ein schwach wachsendes $h:[n'] \to [m]$ mit $f = h \circ g$ und $\sigma' = X(h)\tau$.
Mit anderen Worten:
Ist σ eine Entartung von σ', so kommen σ und σ' vom selben nicht-entarteten Simplex.
Beweis. Nach der vorigen Aussage erhält man σ' aus einem nicht-entarteten Simplex $\sigma'' \in X_{n''}$ mit Hilfer einer schwach wachsenden Surjektion $h'':[n'] \to [n'']$. Dann erhält man aber σ aus σ'' mit Hilfe von $g \circ h''$. Da auch τ nicht-entartet ist, ergibt sich aus der Eindeutigkeitsaussage für die Darstellung durch nicht-entartete Simplexe daß $\sigma'' = \tau$ und $g \circ h'' = f$ gelten muß. Dann ist aber $h := h'$ eine Abbildung der gesuchten Art.
QED.

|X| als Vereinigung der nicht-entarteten offenen Simplexe
Sei X eine simpliziale Menge. Dann ist die Einschränkung

$$\tau^\circ : \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n^\circ \times X_{(n)} \to |X|$$

der natürlichen Abbildung τ eine bijektive Abbildung.
Beweis (nach Gelfand & Manin). Bezeichne

$$\tau: \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n \times X_n \to |X|$$

die natürliche Surjektion und $\dot{\tau}$ die Einschränkung von τ auf $\bigcup_{n=0}^{\infty} \dot{\Delta}_n \times X_{(n)}$

1. Schritt. Die Abbildung $\tau^\circ : \bigcup_{n=0}^{\infty} \dot{\Delta}_n \times X_{(n)} \to |X|$ ist surjektiv.

Sei $p \in |X|$. Bezeichne k die kleinste Dimension, für welche ein $(x,\sigma) \in \Delta_k \times X_k$ mit

$$\tau(x,\sigma) = p$$

existiert. Es reicht zu zeigen, σ ist in dieser Situation nicht-entartet und x liegt im Innern von Δ_k . Angenommen, σ ist entartet. Dann gibt es eine schwach wachsende Surjektion $f:[k] \twoheadrightarrow [k']$ mit $k > k'$ und ein Simplex $\sigma' \in X_{k'}$ mit $\sigma = X(f)\sigma'$. Nach Definition der Realisierung gilt dann aber

$$\tau(x,\sigma) = \tau(\Delta_f(x), \sigma')$$

im Widerspruch zur Wahl von k. Also kann σ nicht entartet sein.
Nehmen wir jetzt an, x liegt nicht im Innern von Δ_k . Dann gibt es eine schwach wachsende Injektion $f:[k'] \hookrightarrow [k]$ mit $k' < k$, so daß x auf der f-Seite von $\sigma' := X(f)\sigma$ liegt,

$$(x',\sigma') \overset{f}{\mapsto} (x, \sigma) \text{ für ein } x' \in \Delta_{k'}$$

Dann gilt aber wiederum, $\tau(x,\sigma) = \tau(x',\sigma')$ im Widerspruch zur Wahl von k. Also liegt x im Innern von Δ_k .

2. Schritt. Beschreibung der nachfolgenden Beweisschritte.

Seien $(x,\sigma) \in \dot{\Delta}_k \times X_{(k)}$ und $(x',\sigma') \in \dot{\Delta}_k, \times X_{(k')}$ zwei Paare mit demselben Bild bei der Abbildung τ,

$$\tau(x,\sigma) = \tau(x',\sigma').$$

Dann gibt es eine endliche Folge von äquivalenten Paaren

$$(x,\sigma)=(x_0,\sigma_0) \approx (x_1,\sigma_1) \approx \ldots \approx (x_N,\sigma_N) = (x',\sigma') \qquad (1)$$

wobei die Äquivalenz benachbarter Paare von einer elementaren Äquivalenz der Gestalt

$$(x_i,\sigma_i) \overset{f_i^+}{\mapsto} (x_{i+1},\sigma_{i+1}) \text{ oder } (x_{i+1},\sigma_{i+1}) \overset{f_i^-}{\mapsto} (x_i,\sigma_i)$$

kommt. Von benachbarten Äquivalenzen kann man annehmen, daß sie von unterschiedlichem Typ sind (nicht beide + bzw. nicht beide -), da man andernfalls durch Komposition der Abbildungen $f_i^{\pm}$ die Kette verkürzen kann. Man beachte, die Simplexe σ_i können entartet sein, und die x_i können auf den Seiten der entsprechenden Standardsimplexe liegen. Zum Nachweis der Injektivität genügt es zu zeigen:

(i) Im Fall N=1 gilt $f_1 = \mathrm{id}$.

(ii) Im Fall N≥2 kann man obige Kette von Äquivalenzen verkürzen. Anders als bei den triangulierten Räumen müssen wir die Fälle N=2 und N>2 gesondert betrachten.

Der Fall N=1 wird sich aus der folgenden Injektivitäts- bzw. Surjektivitätsaussage für die $f_0^{\pm}$ ergeben.

Schritt 3. Die Abbildung f_0^{ε} ist injektiv im Fall ε=+. Sie ist surjektiv im Fall ε=-, wenn $x = x_0$ im Innern von Δ_k liegt.

Ist ε=+, so gilt $\sigma_0 = X(f_0^+)\sigma_1$. Weil $\sigma_0 = \sigma$ nach Voraussetzung nicht-entartet ist, muß f_0^+ nach der Bemerkung unmittelbar nach der Definition von ‘nich-entartet’ injektiv sein.

Im Fall ε=- gilt $x_0 = \Delta_{f_0^-}(x_1)$, und die Annahme, daß x_0 im Innern des Standardsimplex liegt, bedeutet, $\Delta_{f_0^-}$ ist surjektiv.[131] Durch Einschränken auf die Eckenmenge erhalten wir die Surjektivität von f_0^- .
Die eben bewiesene Aussage des dritten Schrittes hat im Fall N=1 zur Folge, daß f_0 sowohl injektiv als auch surjektiv sein muß.[132] Für monotone Funktionen bedeutet das, f_0 =id.

Schritt 4. Ist f_i^+ injektiv, so kann man die elementaren Äquivalenzen

$$(x_i,\sigma_i) \overset{f_i^+}{\mapsto} (x_{i+1},\sigma_{i+1}) \overset{f_{i+1}^-}{\mapsfrom} (x_{i+2},\sigma_{i+2})$$

$$[m_i] \overset{f_i^+}{\rightarrowtail} [m_{i+1}] \overset{f_{i+1}^-}{\twoheadleftarrow} [m_{i+2}]$$

ersetzen durch Äquivalenzen der Gestalt

$$(x_i,\sigma_i) \overset{g}{\mapsfrom} (y,\tau) \overset{h}{\mapsto} (x_{i+2},\sigma_{i+2})$$

$$[m_i] \overset{g}{\twoheadleftarrow} [\ell] \overset{h}{\rightarrowtail} [m_{i+2}]$$

Zum Beweis bezeichnen wir das vollständige Urbild bei f_{i+1}^- des Bildes von f_i^+ mit I. Sei ℓ+1 die Anzahl der Elemente von I. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm monotoner Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} [m_i] & \overset{f_i^+}{\rightarrowtail} & [m_{i+1}] & \overset{f_{i+1}^-}{\twoheadleftarrow} & [m_{i+2}] \\ & {\scriptstyle g}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle h} & \\ & & [\ell] & & \end{array}$$

Dabei sei h die Injektion mit dem Bild I, sodaß das Bild der Zusammensetzung mit f_{i+1}^- im Bild von f_i^+ liegt. Wegen der Injektivität von f_i^+ faktorisiert sich diese Zusammensetzung über $[m_i]$ und führt so zu der Abbildung g.
Das Bild von h ist nach Definition gleich

$$\mathrm{Im}(h) = I = (f_{i+1}^-)^{-1}\mathrm{Im}(f_i^+).$$

Deshalb ist das Bild von Δ_h gleich

$$\mathrm{Im}(\Delta_h) = (\Delta_{f_{i+1}^-})^{-1}(\mathrm{Im}(\Delta_{f_i^+})).$$

Wegen

---

[131] Denn x_0 ist eine Linearkombination der Ecken, in der jede Ecke mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt.
[132] Weil dann beide beteiligten Simplexe nicht-entartet sind: auf Grund der bestehenden elementaren Relation sind es dieselben Simplexe und haben insbesondere dieselbe Dimension. Injektivität und Surjektivität implizieren jeweils beide für sich bereit die Bijektivität.

$$\Delta_{f_{i+1}^-}(x_{i+2}) = x_{i+1} = \Delta_{f_i^+}(x_i)$$

gibt es ein $y \in \Delta_h$ mit $\Delta_h(y) = x_{i+2}$, d.h. es ist

$$(y,\tau) \overset{h}{\mapsto} (x_{i+2},\sigma_{i+2})$$

mit

$$\tau := X(h)(\sigma_{i+2}) = X(g)(\sigma_i)$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms folgt

$$\Delta_{f_i^+}(\Delta_g(y)) = \Delta_{f_{i+1}^-}(\Delta_h(y)) = \Delta_{f_{i+1}^-}(x_{i+2}) = x_{i+1} = \Delta_{f_i^+}(x_i).$$

Weil f_i^+ injektiv ist, folgt

$$\Delta_g(y) = x_i ,$$

d.h. es ist

$$(x_i ,\sigma_i) \overset{g}{\leftarrow} (y,\tau).$$

Schritt 5. Sei $N \geq 2$. Dann kann man die Folge der elementaren Relationen (1), falls sie mit einem f^+ beginnt, so abändern, daß sie mit einem f^- beginnt, welchdes surjektiv ist.

Nach dem dritten Schritt ist dann f_0^+ injektiv. Nach dem vierten Schritt kann man dann aber die ersten beiden Relationen so abändern, daß die Folge mit einem f^- beginnt. Dieses ist surjektiv auf Grund des dritten Schritts.

Schritt 6. Der Fall N = 2.

Nach dem fünften Schritt können wir annehmen, daß die Folge der Relationen (1) die folgende Gestalt hat.

$$(x_0,\sigma_0) \overset{f_0^-}{\leftarrow} (x_1,\sigma_1) \overset{f_1^+}{\mapsto} (x_2,\sigma_2)$$

mit f_0^- surjektiv. Wir wenden den dritten Schritt auf f_1^+ mit vertauschten (x_1,σ_1) und (x_2,σ_2) an (sodaß f_1^+ zu einem f^- wird, daß am Anfang einer Folge elementarer Relationen steht). Weil x_2 im Innern des Standard-Simplex liegt, ist danach auch f_1^+ surjektiv. das Simplex σ_1 ergibt sich somit aus den beiden nicht-entarteten Simplexen σ_0 und σ_2 mit Hilfe der beiden Surjektionen f_0^- und f_1^+. Wegen der Eindeutigkeit des nicht-entarteten Repräsentanten folgft

$$\sigma = \sigma_0 = \sigma_2 = \sigma' \text{ und } f_0^- = f_1^+.$$

Insbesondere ist damit auch

$$x = x_0 = \Delta_{f_0^-}(x_1) = \Delta_{f_1^+}(x_1) = x_2 = x',$$

d.h. die beiden Paare (x, σ) und (x', σ') sind gleich.

Schritt 7. Der Fall $N \geq 3$.

Nach dem fünften Schritt können wir annehmen, daß der Anfang der Folge (1) der elementaren Relationen die folgende Gestalt hat.

$$(x_0,\sigma_0) \overset{f_0^-}{\leftarrow\!\!\shortmid} (x_1,\sigma_1) \overset{f_1^+}{\mapsto} (x_2,\sigma_2) \qquad (2)$$

$$[m_0] \overset{f_0^-}{\longleftarrow} [m_1] \overset{f_1^+}{\longrightarrow} [m_2]$$

mit f_0^- surjektiv. Wir zerlegen f_1^+ in eine Surjektion und eine Injektion (beide monton),

$$f_1^+ = i\circ p\colon [m_1] \overset{p}{\twoheadrightarrow} [\ell] \overset{i}{\rightarrowtail} [m_2]$$

Dann ist σ_1 das Bild eines Simplexes σ'_1 bei X(p). Weil σ_1 vom nicht-entarteten Simplex σ_0 kommt, gilt dasselbe von σ'_1, d.h. f_0^- faktorisiert sich über p,

$$f_0^- = g\circ p\colon [m_1] \overset{p}{\twoheadrightarrow} [\ell] \overset{g}{\longrightarrow} [m_0]$$

Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm von monotonen Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} & & [\ell] & & \\ & g\swarrow & \uparrow p & \searrow i & \\ [m_0] & \overset{f_0^-}{\longleftarrow} & [m_1] & \overset{f_1^+}{\longrightarrow} & [m_2] \end{array}$$

Sei p ein monotoner Schnitt von p Dann gilt

$$f_0^-\circ j = gpj = g \text{ und } f_1^+\circ j = ipj = i,$$

d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} & & [\ell] & & \\ & g\swarrow & \downarrow j & \searrow i & \\ [m_0] & \overset{f_0^-}{\longleftarrow} & [m_1] & \overset{f_1^+}{\longrightarrow} & [m_2] \end{array}$$

Wir ersetzen (2) durch

$$(x_0,\sigma_0) \overset{g}{\leftarrow\!\!\shortmid} (\Delta_p(x_1),X(j)\sigma_1) \overset{i}{\mapsto} (x_2,\sigma_2)$$

$$[m_0] \overset{g}{\longleftarrow} [\ell] \overset{i}{\longrightarrow} [m_2]$$

Man beachte, des gilt

$$\Delta_g(\Delta_p(x_1)) = \Delta_{pg}(x_1) = \Delta_{f_0^-}(x_1) = x_0$$

$$\Delta_i(\Delta_p(x_1)) = \Delta_{ip}(x_1) = \Delta_{f_1^+}(x_1) = x_2$$

$$X(g)\sigma_0 = X(f_0^-\circ j)\sigma_0 = X(j)X(f_0^-)\sigma_0 = X(j)\sigma_1$$

$$X(i)\sigma_2 = X(f_1^+\circ j)\sigma_2 = X(j)X(f_1^+)\sigma_0 = X(j)\sigma_1$$

Wir können damit annehmen, daß f_1^+ injektiv ist. Nach dem vierten Schritt können wir die beiden Äquivalenzen

$$(x_1,\sigma_1) \overset{f_1^+}{\mapsto} (x_2,\sigma_2) \overset{f_2^-}{\leftarrow\!\!\shortmid} (x_3,\sigma_3)$$

$$[m_i] \overset{f_1^+}{\rightarrowtail} [m_2] \overset{f_2^-}{\leftarrow} [m_3]$$

ersetzen durch Äquivalenzen der Gestalt

$$(x_i,\sigma_i) \overset{g}{\leftarrowtail} (y,\tau) \overset{h}{\mapsto} (x_3,\sigma_3)$$

$$[m_i] \overset{g}{\leftarrow} [\ell] \overset{h}{\longrightarrow} [m_3]$$

Jetzt bietet sich aber die Gelegenheit elementare Äquivalenzen zusammenzufassen. Anstelle der ersten drei Äquivalenzen können wir die folgenden zwei verwenden:

$$(x_0,\sigma_0) \overset{f_0^-g}{\leftarrowtail} (y,\tau) \overset{h}{\mapsto} (x_3,\sigma_3)$$

$$[m_0] \overset{f_0^-g}{\leftarrow} [\ell] \overset{h}{\longrightarrow} [m_3]$$

Im Fall $N \geq 4$ können wir die ersten vier Äquivalenzen durch die folgenden zwei ersetzen.

$$(x_0,\sigma_0) \overset{f_0^-g}{\leftarrowtail} (y,\tau) \overset{f_1^+h}{\mapsto} (x_4,\sigma_4)$$

$$[m_0] \overset{f_0^-g}{\leftarrow} [\ell] \overset{f_1^+h}{\longrightarrow} [m_4]$$

In beiden Fällen können wir die Anzahl der elementaren Äquivalenzen in (1) verkleinern.

Eine Alternative für die Wahl der Standard-Simplexe

Der grundlegende Schritt für den Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber ist die Beschreibung des direkten Produkts

$$\Delta^m \times \Delta^n$$

zweier Standard-Simplexe als Realisierung einer simplizialen Menge. Dafür ist es nützlich, die Beschreibung der Standard-Simplexe etwas abzuändern.

Anstelle der alten Definition

$$\Delta'^n := \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 0,\ 0 \leq x_i\}$$

wollen wir hier vorübergehend die folgende verwenden

$$\Delta^n := \{(y_0,\ldots,y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid 0 = y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{n+1} = 1\}$$

Man beachte man hat eine Homöomorphismus

$$\Delta'^n \longrightarrow \Delta^n,\ (x_0,\ldots,x_n) \mapsto (0,\ x_0,\ x_0+x_1,\ldots,x_0+\ldots+x_n)$$

mit der Umkehrung

$$(y_0,\ldots,y_{n+1}) \mapsto (y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ldots,\ y_{n+1}-y_n).$$

Bemerkungen

(i) Die i-te Seiten-Abbildung ∂_i definiert dann auf den Standard-Simplexen die lineare Abbildung

$$\partial^i = \Delta_{\partial_i} : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n,\ (y_0,\ldots,y_n) \mapsto (y_0,\ldots,y_i,y_i,\ldots y_n),$$

(ii) Für die i-te Entartung ε_i bekommt die zugehörige lineare Abbildung auf den Standard-Simplexen die Gestalt

$$\varepsilon^i = \Delta_{\varepsilon_i} : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n, (y_0,...,y_{n+2}) \mapsto (y_0,...,y_i,y_{i+2},...y_{n+1}).$$

(iii) Die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge X läßt sich dann wie folgt beschreiben.

$$|X| = \overline{X}/\sim$$

Dabei sei $\overline{X}$ die disjunkte Vereinigung

$$\overline{X} = \vee_{i=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$$

und die Äquivalenz-Relation wird von den folgenden Relationen erzeugt.

$(\partial^i k_n, x_{n-1}) \sim (k_n , \partial^i x_{n-1})$ für $x_{n-1} \in \Delta^{n-1}$ und $k \in X_n$

$(\varepsilon^i k_n, x_{n+1}) \sim (k_n , \varepsilon^i x_{n+1})$ für $x_{n+1} \in \Delta^{n+1}$ und $k \in X_n$.

Die Äquivalenzklasse von (k_n, x_n) in $|X|$ wollen wir im folgenden mit

$$|k_n, x_n|$$

bezeichnen (mit Fall n = 0 kann man x_n weglassen).

(iv) Jedes n-Simplex $\sigma_n \in X_n$ einer simplizialen Menge X läßt auf genau eine Weise in der Gestalt

$$\sigma_n = \varepsilon^{j_p} \circ ... \circ \varepsilon^{j_1} (\sigma_{n-p})$$

schreiben mit

$$0 \le j_1 < ... < j_p < n$$

und einen nicht-entarten Simplex $\sigma_{n-p} \in X_{n-p}$.

(v) Jeder Punkt $x_n \in \Delta_n$ läßt sich auf genau eine Weise in der Gestalt

$$x_n = \partial^{i_q} \circ ... \circ \partial^{i_1} (x_{n-q})$$

schreiben mit

$$0 \le i_1 < ... < i_q < n$$

und einem Punkt $x_{n-q} \in \dot{\Delta}_{n-q}$ im Innern des Standard-Simplex (d.h. die Koordinaten des Punktes sind paarweise verschieden).[133]

(vi) Jeder Punkt von $\overline{X}$ ist äquivalent zu einem nicht-entarteten Punkt, d.h. zu einem Punkt, dessen erste Koordinate ein nicht-entartetes Simplex von X ist und dessen zweite Koordinate im Innern des Standard-Simplex liegt.

Satz von Eilenberg-Zilber

Seien X und Y simplizialen Mengen und

$$X \times Y$$

die simpliziale Menge

---

[133] Δ_{n-q} ist der Träger des Punktes. Die Einbettung in Δ_n geschieht so, daß zunächst die Ecken mit kleinem Index hinzufügt und die mit großen.

$$\Delta^{op} \longrightarrow \text{Ens}, [n] \longrightarrow X_n \times Y_n.$$

Die natürlichen Projektionen

$$p_X: X \times Y \longrightarrow X \text{ und } p_Y: X \times Y \longrightarrow Y$$

induzieren stetige Abbildungen

$$|p_X|: |X \times Y| \longrightarrow |X| \text{ und } |p_Y|: |X \times Y| \longrightarrow |Y|$$

und damit eine stetige Abbildung

$$\rho: |X \times Y| \longrightarrow |X| \times |Y|.$$

Diese Abbildung ist bijektiv (und bezüglich der kompakt erzeugten Topologien ein Homöomorphismus).

Beweis (Milnor bzw. Eilenberg & Steenrod). Sei

$$z \in |X \times Y|$$

ein Punkt mit dem nicht-entarteten Repräsentanten

$$((\sigma_n, \tau_n), z_n) \in X_n \times Y_n \times \Delta_n.$$

1. Schritt. Wir beschreiben die nicht-entarteten Repräsentanten von

$$|p_X|(z) = |\sigma_n, z_n| \text{ und } |p_Y|(z) = |\tau_n, z_n|$$

Dazu schreiben wir σ_n und τ_n in der Gestalt

$$\sigma_n = \varepsilon^{i_p} \circ \ldots \circ \varepsilon^{i_1} \sigma_{n-p} \text{ und } \tau_n = \varepsilon^{j_q} \circ \ldots \circ \varepsilon^{j_1} \tau_{n-q}$$

mit $\sigma_{n-p} \in X_{n-p}$ und $\tau_{n-q} \in Y_{n-q}$ nicht-entartet , $i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_q$. Die gesuchten Repräsentanten sind gerade die Paare

$$(\sigma_{n-p}, \varepsilon^{i_1} \ldots \varepsilon^{i_p} z_n) \text{ bzw. } (\sigma_{n-q}, \varepsilon^{j_1} \ldots \varepsilon^{j_q} z_n).$$

Man beachte, nach Voraussetzung ist z_n ein Punkt aus dem Inneren von Δ_n, und die ε^ν bilden innere Punkte in innere Punkte ab.

Außerdem sind die Index-Mengen der i_ν und j_μ disjunkt,

$$\{i_1, \ldots, i_p\} \bigcap \{j_1, \ldots, j_q\} = \varnothing.$$

Wäre nämlich $i_\alpha = j_\beta$, so könnte man die zugehörigen Entartungen ε in den Darstellungen von σ_n und τ_n an die erste Stelle bringen und

$$(\sigma_n, \tau_n) \in \varepsilon^{i_\alpha}(X_{n-1} \times Y_{n-1})$$

wäre entartet. Wir zeigen jetzt, der Punkt z ist durch sein Bild

$$\rho(z) = (|\sigma_{n-p}, \varepsilon^{i_1} \ldots \varepsilon^{i_p} z_n| \, , \; |\sigma_{n-q}, \varepsilon^{j_1} \ldots \varepsilon^{j_q} z_n|)$$

eindeutig bestimmt.

2. Schritt. Konstruktion der Umkehrabbildung.

Sei $(x, y) \in |X| \times |Y|$ und seien

$$(\xi_a, x_a) \in X_a \times \Delta_a \text{ und } (\psi_b, y_b) \in Y_b \times \Delta_b$$

nicht-entartete Repräsentanten von x bzw. y. Wir schreiben

$$x_a = (u_0, \ldots, u_{a+1}) \text{ und } y_b = (v_0, \ldots, v_{b+1}).$$

Weiter seien

$$0 = w_0 < \ldots < w_{c+1} = 1$$

die der Größe nach geordneten Elemente der Menge $\{u_0,...,u_{a+1}, v_0, ... , v_{b+1}\}$. Wir setzen

$$z'_c = (w_0 , ... , w_{c+1}).$$

Der Punkt x_a entsteht aus z'_c durch das Streichen gewisser Koordinaten, sagen wir der Koordinaten mit den Indizes $\mu_1+1, ... , \mu_{c-a}+1$. Dann gilt

$$x_a = \varepsilon^{\mu_1}...\varepsilon^{\mu_{c-a}}z'_c.$$

Analog erhält man

$$y_b = \varepsilon^{\nu_1}...\varepsilon^{\nu_{c-b}}z'_c.$$

Da jede Koordinate in einen der beiden Punkte x_a oder y_b vorkommt, d.h. bei einem der beiden Streichvorgänge übrigbleibt, sind die beiden Mengen der μ und ν disjunkt,

$$\{\mu_1, ... , \mu_{c-a}\} \bigcap \{\nu_1, ... , \nu_{c-b}\} = \varnothing.$$

Wir setzen

$$\eta(x, y) := |(\varepsilon^{\mu_{c-a}}\circ...\circ \varepsilon^{\mu_1}\xi_a, \varepsilon^{\nu_{c-b}}\circ...\circ \varepsilon^{\nu_1}\psi_b, z'_c)| \in |X \times Y|.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |p_X|(\eta(x, y)) &= | \varepsilon^{\mu_{c-a}}\circ...\circ \varepsilon^{\mu_1}\xi_a , z'_c | \\ &= | \xi_a , \varepsilon^{\mu_1}...\varepsilon^{\mu_{c-a}}z'_c | \\ &= | \xi_a , x_a | \\ &= x \end{aligned}$$

und analog erhält man

$$|p_Y|(\eta(x, y)) = x.$$

Zusammen ist also

$$\rho\circ\eta = Id.$$

Sei andererseit $z \in |X \times Y|$ ein Punkt mit dem oben angegebenen Repräsentanten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \eta(\rho(z)) &= \eta((|\sigma_{n-p}, \varepsilon^{i_1}...\varepsilon^{i_p}z_n| , |\sigma_{n-q}, \varepsilon^{j_1}...\varepsilon^{j_q}z_n|)) \\ &=^{134} |(\varepsilon^{i_p}...\varepsilon^{i_1}\sigma_{n-p} , \varepsilon^{j_q}... \varepsilon^{j_1}\sigma_{n-q} , z_n)| \\ &= |((\sigma_n, \tau_n), z_n)| \\ &= z. \end{aligned}$$

Die Abbildungen ρ und η sind somit invers zueinander. Insbesondere ist ρ bijektiv.

QED.

---

[134] Die Mengen der i_ν und j_μ sind disjunkt.

Beispiele

Beispiel: $\Delta[n]$

Sei $\Delta[n]$ die simpliziale Menge

$$\Delta[n] := \mathrm{Hom}(\ ?\ , [n]): \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

Bemerkungen

(i) Ein p-Simplex von $\Delta[n]$ ist entartet, wenn es im Bild einer der Abbildungen

$$\mathrm{Hom}(\varepsilon_i\ , [n]): \mathrm{Hom}([p\text{-}1]\ , [n]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\ [p]\ , [n]),\ \alpha \mapsto \alpha \circ \varepsilon_i\ .$$

liegt. Dabei sei ε_i: $[p] \twoheadrightarrow [p\text{-}1]$ die Surjektion, deren Faser über i aus zwei Elementen besteht. Mit anderen Worten, die entarteten p-Simplexe sind gerade die nicht-injektiven Abbildungen von $\Delta[n]_p$.

(ii) Ensprechend sind die nicht-entarteten p-Simplexe die injektiven Abbildungen von $\Delta[n]_p$. Diese sind durch ihr Bild bereits eindeutig festgelegt. Die nicht-entarteten p-Simplexe von $\Delta[n]$ entsprechen also gerade den Teilmengen von [n] aus p+1 Elementen.

(iii) Identifiziert man $i \in \Delta[n]$ mit der i-ten Ecke e_i des n-dimensionalen Standard-Simplex $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, so entsprechen die nicht-entarteten p-Simplexe von $\Delta[n]$ gerade den Ecken-Mengen der p-dimensionalen Seiten des Standard-Simplex Δ_n.

Die Menge der nicht-entarteten Simplexe von $\Delta[n]$ entspricht also gerade dem Simplizial-Komplex, welcher das n-dimensionale Standard-Simplex beschreibt.

(iv) $|\Delta[n]| = \Delta_n$.

Beispiel: $\partial\Delta[n] = \dot{\Delta}[n]$

Sei $\partial\Delta[n] = \dot{\Delta}[n]$ der Teilfunktor von $\Delta[n]$ mit

$$\dot{\Delta}[n]_p = \{f \in \Delta[n]_p \mid \mathrm{Im}(f) \neq [n]\}.$$

Diese simpliziale Menge beschreibt gerade den Rand des n-dimensionalen Standard-Simplex.

Beispiel: Das n-Skelett einer simplizialen Menge

Sei X eine simpliziale Menge und n eine nicht-negative ganze Zahl. Wir setzen

$$(\mathrm{Sk}_n X)_p := \{\sigma \in X_p \mid \sigma \text{ hat einen nicht-entarten Repräsentanten der Dimension} \leq n\}$$

Bemerkungen

(i) $(\mathrm{Sk}_n X)_p := \{\sigma \in X_p \mid \sigma$ kommt von einem Simplex der Dimension $\leq n\}$

(ii) Auf diese Weise ist eine simpliziale Teilmenge

$$\mathrm{Sk}_n X \subseteq X$$

definiert, welche n-Skelett von X heißt.

(iii) Die Realisierung $|\mathrm{Sk}_n X|$ des n-Skeletts ist eine abgeschlossene Teilmenge der Realisierung von $|X|$.

(iv) Eine simpliziale Menge X heißt n-dimensional, wenn gilt

$$X = sk_n X \neq sk_{n-1} X,$$

d.h. wenn es ein n-dimensionales nicht-entartetes Simplex gibt aber keine (n+1)-dimensionalen nicht-entarteten Simplexe.

(v) Für jedes nicht-entartete n-Simplex x der simplizialen Menge X gibt es einen Morphismus simplizialer Mengen[135]

$$\tilde{x}: \Delta[n] \longrightarrow Sk_n X,\ [m] \xrightarrow{f} [n] \mapsto X(f)x.$$

Die Einschränkung von $\tilde{x}$ auf die simpliziale Teilmenge $\dot{\Delta}[n]$ von $\Delta[n]$ definiert dabei einen Morphismus

$$\tilde{x}:\dot{\Delta}[n] \longrightarrow Sk_{n-1} X$$

(vi) Unter Verwendung der Abbildungen $\tilde{x}$ von (v) für alle nicht-entarteten Simplexe s einer simplizialen Menge erhält man ein kommutatives Diagramm von Morphismen simplizialer Mengen[136]

$$\begin{array}{ccc} \vee_{\sigma\in X_{(n)}} \dot{\Delta}_n & \xrightarrow{\vee\tilde{x}} & sk_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vee_{\sigma\in X_{(n)}} \Delta_n & \xrightarrow{\vee\tilde{x}} & sk_n X \end{array} \qquad (I)$$

---

[135] Im Gegensatz zur Aussage in Übungsaufgabe 2 zu Kapitel I, §2 im Buch von

Gelfand & Manin: Methods of homological algebra

ist der Morphismus $\tilde{x}$ im allgemeinen keine Einbettung, d.h. $\Delta[n]$ wird im allgemeinen nicht mit einem Teilfunktor von $Sk_n X$ identifiziert.

Da die nicht-entarteten Simplexe von X nicht-notwendig einen Teilfunktor von X bilden (vgl. Proposition 6, §2, Kapile I des Buchs von Gelfand & Manin), d.h. die Seitenabbildungen können x in entartete Simplexe Abbildung, muß die Einschränkung von $|\tilde{x}|$ auf das Innere einer Seite von Δ_n nicht injektiv sein.

Allerdings ist das Bild des einzigen nicht-entarteten n-Simplex von $\Delta[n]$ ein nicht-entartetes n-Simplex. Deshald ist die Realisierung

$$|\tilde{x}|: \Delta_n = |\Delta[n]| \longrightarrow |Sk_n X|$$

auf dem Innern des Standard-Simplexes Δ_n injektiv.

[136] Genau genommen hat das Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X_{(n)} \times \dot{\Delta}_n & \xrightarrow{\vee\tilde{x}} & sk_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{(n)} \times \Delta_n & \xrightarrow{\vee\tilde{x}} & sk_n X \end{array}$$

Wir wollen durch die obige Schreibweise betonen, daß man die direkten Produkte links als disjunkte Vereinigungen von n-Simplexen bzw. von deren Rändern auffassen kann.

Geht man zum zugehörigen Diagramm der Realisierungen über, so erhält man ein Diagramm, welches bechreibt wie man aus dem realisierten (n-1)-Skelett das realisierte n-Skellet von X erhält:
Das Innere der n-dimensionen Standard-Simplexe links unten wird zum (n-1)-Skelett hinzugefügt, indem man deren Randpunkte mit ihren Bildern im (n-1)-Skelett bei der oberen horizontalen Abbildung identifiziert.
Man nennt diesen Prozeß Adjunktion von n-Zellen.

Für jeden Morphismus simplizialer Mengen $f:sk_n X \longrightarrow Y$ erhält man aus diesen Diagramm durch Zusammensetzen mit f ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \vee_{\sigma\in X_{(n)}} \dot{\Delta}_n & \xrightarrow{\vee\tilde{x}} & sk_{n-1}X \\ \downarrow\!\uparrow & & \downarrow\beta \\ \vee_{\sigma\in X_{(n)}} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Umgekehrt entsteht jedes kommutive Diagramm der Gestalt (II) auf die eben beschriebene Art aus (I) mit Hilfe eines eindeutig bestimmten Morphismus f simplizialer Mengen.

Beweis. Zu (i). Sei

$$\sigma = X(f)\tau$$

mit einer monotonen Abbildung f: [p] $\longrightarrow$ [m] und m = dim $\tau \le$ n. Wir zerlegen f in eine Surjektion gefolgt von einer Injektion,

$$f: [p] \overset{f'}{\twoheadrightarrow} [m'] \overset{i}{\hookrightarrow} [m].$$

Dann gilt m ' $\le$ m $\le$ n. Man kann τ durch X(i)τ ersetzen und f durch f', d.h. wir können annehmen, daß f surjektiv ist. Falls τ nicht-entartet ist, so kommt τ zumindest von einem nicht-entarteten Simplex, sagen

$$\tau = X(g)\tau'$$

mit einer Surjektion

$$g: [m] \twoheadrightarrow [m']$$

und insbesondere dim τ' = m' $\le$ m $\le$ n. Wir können τ durch τ' ersetzen und f durch gf. Der nicht-entartete Repräsentant von σ hat somit eine Dimension $\le$ n. Wir haben damit gezeigt , die Menge auf der rechten Seite von (i) liegt in $(Sk_n X)_p$. Die umgekehrte Inklusion besteht trivialerweise.

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, für jedes $\sigma\in(Sk_n X)_p$ und jede monoton steigende Abbildung

$$f: [p'] \longrightarrow [p]$$

kommt

$$\sigma' := X(f)\sigma$$

von einem Simplex der Dimension $\le$ n. Nach Voraussetzung hat σ einen nicht-entarteten Repräsentanten der Dimension m $\le$ n, sagen wir

$$\sigma = X(g)\tau$$

mit einer monoton steigenden Surjektion

$$g: [p] \twoheadrightarrow [m] \text{ und } m \le n.$$

Wir zerlegen f in eine Surjektion und eine Injektion, sagen wir

$$f:[p'] \overset{f'}{\twoheadrightarrow} [p''] \overset{i}{\hookrightarrow} [p]$$

und tun dasselbe anschließend mit der Zusammensetzung

$$gi: [p''] \overset{g'}{\twoheadrightarrow} [m''] \overset{j}{\hookrightarrow} [m]$$

und erhalten ein kommutatives Diagramm monoton wachsender Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} [p] & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & [m] \\ & \overset{i}{\nwarrow} & \overset{j}{\nwarrow} \\ f\uparrow & [p''] & \overset{g'}{\twoheadrightarrow} \quad [m''] \\ [p'] & \overset{f'}{\nearrow} & \end{array}$$

Es gilt

σ'	$= X(f)\sigma$	(Definition von σ')
	$= X(f)X(g)\tau$	(Wahl von τ)
	$= X(gf)\tau$	(Funktorialität von X)
	$= X(jg'f')\tau$	(Kommutativität des Diagramms)

Also kommt σ' ebenfalls von einem Simplex der Dimension $\leq n$.

Zu (iii). Nach Definition kommt jedes Simplex des n-Skeletts von einem nicht-entarteten Simplex einer Dimension $\leq n$. Dieses nicht-entartete Simplex von X ist dabei selbst ein Simplex von des n-Skeletts.

Das bedeutet aber, die nicht-entarteten Simplexe des n-Skelets von X sind gerade die nicht-entarteten Simplexe von X, welche eine Dimension $\leq n$ haben. Damit gilt

$$|Sk_n X| = \vee_{p=0}^{\infty} Sk_n X_{(p)} \times \dot{\Delta}_p \subseteq \vee_{p=0}^{\infty} X_{(p)} \times \dot{\Delta}_p = |X|$$

wenn wir mit $Y_{(p)}$ für jede simpliziale Menge Y die Menge der nicht-entarteten p-Simplexe bezeichnen. Die disjunkte Vereinigung links ist das Komplement in |X| der Vereinigung der offenen Mengen

$$X_{(p)} \times \dot{\Delta}_p$$

mit $p > n$. Insbesondere ist $|Sk_n X|$ abgeschlossen in |X|.

Zu (iv). Es ist nichts zu beweisen.

Zu (v). Jedes Simplex im Bild der Abbildung $\tilde{x}$ kommt nach Konstruktion vom Simplex x der Dimension x, ist also ein Simplex des n-Skeletts von X. Weil X ein Funktor ist, ist definiert die Abbildung $\tilde{x}$ einen funktoriellen Morphismus, also einen Morphismus simplizialer Mengen.

Ein Simplex von $\dot{\Delta}[n]$ ist eine Abbildung $f: [m] \longrightarrow [n]$, welche nicht surjektiv ist. Es besteht also eine Faktorisierung

$$f: [m] \overset{f'}{\twoheadrightarrow} [\ell] \overset{i}{\hookrightarrow} [n] \text{ mit } \ell < n.$$

Es folgt

$$\tilde{x}(f) = X(f)x = X(if')x = X(f')y \text{ mit } y := X(i)x \in X_{\ell}.$$

Das Simplex $\tilde{x}(f)$ von X kommt von einem Simplex der Dimension $\ell \leq n-1$ und liegt deshalb im (n-1)-Skelett von X.

Zu (vi). Eindeutigkeit von f. Sei σ ein Simplex von $sk_n X$, und sei

$$\sigma = X(g)\tau \qquad (*)$$

dessen eindeutig bestimmte Darstellung mit Hilfe eines nicht-entarteten Simplexes τ. Weil σ im n-Skelett von X liegt ist

$$\tau \in X_{(m)}$$

ein nicht-entartetes Simplex der Dimension $m \leq n$ und $g: [\ell] \twoheadrightarrow [m]$ eine durch die Bedingung (*) eindeutig bestimmte monoton steigende Surjektion.
Falls f existiert, so gilt

$$f(\sigma) = f(X(g)\tau) = Y(g)f(\tau) = \begin{cases} Y(g)\beta(\tau) & \text{falls } \dim \tau < n \\ Y(g)\alpha(id_{[m]}) & \text{falls } \dim \tau = n \end{cases} \qquad (**)$$

Man beachte:

1. Im Fall $\dim \tau < n$ gilt $\tau \in sk_{n-1} X_m$ und $f(\tau) = \beta(\tau)$.

2. Im Fall $\dim \tau = n$ gilt $f(\tau) = f(\widetilde{\tau}(id_{[m]})) = \alpha(id_{[m]})$.

Formel (**) zeigt, f ist durch das Diagramm (II) eindeutig festgelegt.
Existenz des Morphismus f. Man verwende die Formeln (**) zur Defintion von f und zeige, daß auf diese Weise ein Morphismus von simplizialen Mengen definiert ist. Zu zeigen ist, für jede monoton steigende Abbildung $h: [a] \longrightarrow [b]$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} sk_n X_b & \xrightarrow{X(h)} & sk_n X_a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_b & \xrightarrow{Y(h)} & Y_a \end{array}$$

kommutativ.

Hat der nicht-entartete Repräsentant von σ eine Dimension $< n$, so gilt dasselbe auch für den nicht-entarteten Repräsentanten von $X(h)\sigma$ und die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß der rechte vertikale Abbildung von (I) ein Morphismus simplizialer Mengen ist.

Haben die nicht-entarteten Repräsentanten von σ und $X(h)\sigma$ dieselbe Dimension n, so sind die beiden Repräsentanten gleich, und die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die untere horizontale Abbildung von (I) ein Morphismus von simplizialen Mengen ist.

Hat der nicht-entartete Repräsentant von σ die Dimension n und der von $X(h)\sigma$ eine kleinere Dimension, so folgt die Behauptung aus der Kommutativität des Diagramms (I).
QED.

Homologie und Kohomologie

Moore-Komplex und normalisierter Komplex

Das Ziel dieses Anhangs besteht in einer Art geometrischer Interpretation des normalisierten Komplexes einer simplizialen abelschen Gruppe. Genauer: wir haben hier einige Untergruppen einer simplizialen abelschen Gruppe

$$A: \Delta^{op} \longrightarrow Ab$$

zu betrachten und diese mit der Ausgangsgruppe zu vergleichen, bzw. deren Kettenkomplexe mit dem Kettenkomplex

$$(A_*, \partial), \quad \partial := \sum_{i=0}^{n} (-1)\partial^i : A_n \longrightarrow A_{n-1}$$

der Ausgangsgruppe, welchen wir beim Vergleich mit dem normalisierten Komplex auch Moore-Komplex nennen wollen. Zur Erinnerung, der normalisierte Komplex ist der Teilkomplex von (A_*, ∂), welcher im Grad n aus der Untergruppe

$$NA_n := \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ker}(\partial^i : A_n \longrightarrow A_{n-1})$$

von A_n besteht.

Nicht-entartete Simplexe

Die von den nicht-entarteten Simplexen erzeugte Untergruppe ist im allgemeinen kein Teilkomplex (auch im Fall des Nervs einer Kategorie nicht: die Zusammensetzung zweier von id verschiedener Morphismen kann gleich id sein).
Man kann zeigen, man erhält genau dann einen Teilkomplex, wenn der Moore-Komplex von einem Simplizialkomplex (d.h. einer Triangulierung) kommt, vgl. Gelfand & Manin, die Proposition von Chapter I, Section 2.7.

Entartete Simplexe D(A)

Sei

$$A: \Delta \longrightarrow Ab$$

eine simpliziale abelsche Gruppe. Für jedes n bezeichne

$$DA_n := \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i A_{n-1}$$

die Untergruppe von A_n, welche von den entarteten Simplexen erzeugt wird.
Der Randoperator des Moore-Komplexes induziert dann auf den DA_n einen Randoperator und die DA_n definieren so einen Teilkomplex

$$D(A) \subseteq A$$

des Moore-Komplexes.

Beweis. Sei $a \in DA_n$. Wir haben zu zeigen, das Bild d(a) beim Randoperator liegt in DA_{n-1}. Beim Beweis können wirs annehmen,

$$a = \varepsilon^j(b) \text{ für ein } b \in A_{n-1}.$$

Es folgt (auf Grund der simplizialen Relationen)

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial^i \varepsilon^j(b) \\ &= \partial^0 \varepsilon^j(b) - \ldots + (-1)^{j-1} \partial^{j-1} \varepsilon^j(b) \\ &\qquad + \text{zwei Glieder, die sich wegheben} \\ &\qquad + (-1)^{j+2} \partial^{j+2} \varepsilon^j(b) + \ldots + (-1)^n \partial^n \varepsilon^j(b) \\ &= \varepsilon^{j-1} \partial^0(b) - \ldots + (-1)^{j-1} \varepsilon^{j-1} \partial^{j-1}(b) \\ &\qquad + (-1)^{j+2} \varepsilon^j \partial^{j+1}(b) + \ldots + (-1)^n \varepsilon^j \partial^{n-1}(b) \\ &\in DA_{n-1} \end{aligned}$$

QED.

Vergleich von N(A) mit dem Faktor-Komplex A/D(A)

Die Zusammensetzung der Komplex-Morphismen

$$N(A) \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/D(A)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis (vgl. Goerss & Jardin, III.Th. 2.1). Wir haben zu zeigen, für jedes n ist die Zusammensetzung

$$NA_n \hookrightarrow A_n \twoheadrightarrow A_n/DA_n$$

ein Isomorphismus von Gruppen. Wir setzen

$$N_jA_n := \bigcap_{i=0}^{j} \mathrm{Ker}(\partial^i) \qquad (\subseteq A_n)$$

$$D_jA_n := \sum_{i=0}^{j} \varepsilon^i A_{n-1}$$

Es reicht zu zeigen, die Zusammensetzungen

$$\varphi=\varphi_j : N_jA_n \hookrightarrow A_n \twoheadrightarrow A_n/D_jA_n$$

sind Isomorphismen für j = 0, ... , n-1. Wir führen den Beweis durch Induktion nach j.

Der Fall j = 0. Surjektivität.Sei $\alpha \in A_n/D_jA_n$ vorgegeben. Wir wählen einen

Repräsentanten von α in A_n, sagen wir

$$\alpha = [x] \text{ mit } x \in A_n.$$

Dann gilt

$$\alpha = [x - \varepsilon^0\partial^0 x]$$

und

$$\partial^0(x - \varepsilon^0\partial^0 x) = \partial^0 x - \partial^0\varepsilon^0\partial^0 x = \partial^0 x - \partial^0 x = 0$$

also

$$x - \varepsilon^0\partial^0 x \in N_jA_n.$$

Nach Konstruktion gilt $\varphi(x - \varepsilon^0\partial^0 x) = [x - \varepsilon^0\partial^0 x] = \alpha$. Wir haben gezeigt, φ ist surjektiv.

Injektivität. Liege $x \in N_jA_n$ im Kern von φ, d.h.

$$\partial^0 x = 0 \text{ und } x = \varepsilon^0 y \text{ für ein } y \in A_{n-1}.$$

Dann gilt

$$0 = \partial^0 x = \partial^0\varepsilon^0 y = y$$

also $x = \varepsilon^0 y = 0$. Der Kern von φ ist somit trivial.

Der Fall j > 0. Wir können annehmen, $\varphi_0, \dots, \varphi_{j-1}$ sind Isomorphismen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N_{j-1}A_n & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & A_n/D_{j-1}A_n \\ \uparrow & & \downarrow\downarrow \\ N_jA_n & \xrightarrow{\varphi} & A_n/D_jA_n \end{array} \qquad (I)$$

Surjektivität der unteren Zeile. Weil die obere horizontale Abbildung des Diagramms surjektiv ist, kann jedes Element

$$\alpha \in A_n/D_jA_n$$

durch ein Element von $N_{j-1}A_n$ representiert werden, sagen wir

$$\alpha = [x] \text{ mit } x \in N_{j-1}A_n.$$

Dann gilt

$$\alpha = [x - \varepsilon^j\partial^j x]$$

und für $0 \le i < j$ ist

$$\partial^i(x - \varepsilon^j\partial^j x) = \partial^i x - \partial^i\varepsilon^j\partial^j x = 0 - \varepsilon^{j-1}\partial^i\partial^j x = -\varepsilon^{j-1}\partial^{j-1}\partial^i x = -\varepsilon^{j-1}\partial^{j-1}0 = 0$$

Außerdem gilt

$$\partial^j(x - \varepsilon^j\partial^j x) = \partial^j x - \partial^j\varepsilon^j\partial^j x = \partial^j x - \partial^j x = 0.$$

Damit gilt

$$x - \varepsilon^j\partial^j x \in N_jA_n,$$

also $\alpha = \varphi_j(x - \varepsilon^j\partial^j x)$. Wir haben die Surjektivität der unteren Zeile des Diagramms bewiesen.

Injektivität der unteren Zeile. Die j-te Entartungsabbildung

$$\varepsilon^j\colon A_{n-1} \longrightarrow A_n$$

induziert auf Grund der simplizialen Relationen Gruppen-Homomorphismen

$$N_{j-1}A_{n-1} \longrightarrow N_{j-1}A_n \text{ und } D_{j-1}A_{n-1} \longrightarrow D_{j-1}A_n$$

Denn für $i < j$ ist

$$\partial^i\varepsilon^j x = \varepsilon^{j-1}\partial^i x = \varepsilon^{j-1}0 = 0 \text{ für } x \in N_{j-1}$$

und

$$\varepsilon^j\varepsilon^i x = \varepsilon^{j-1}\varepsilon^i x \in D_{j-1}A_n \text{ für } x \in A_{n-1}$$

Damit induziert ε^j auch Homomorphismen auf den Faktorgruppen, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Gruppen-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} N_{j-1}A_{n-1} & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & A_{n-1}/D_{j-1}A_{n-1} \\ \varepsilon^j\downarrow & & \downarrow\varepsilon^j \\ N_{j-1}A_n & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & A_n/D_{j-1}A_n \end{array} \qquad \text{(II)}$$

dessen horizontale Abbildungen nach Induktionsvoeraussetzung bijektiv sind.

Außerdem besteht wegen $D_jA_n = D_{j-1}A_n + \mathrm{Im}(\varepsilon^j)$ eine exakte Sequenz

$$A_{n-1}/D_{j-1}A_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon^j} A_n/D_{j-1}A_n \longrightarrow A_n/D_jA_n \longrightarrow 0. \qquad \text{(III)}$$

Liege x im Kern von $\varphi_j\colon N_jA_n \longrightarrow A_n/D_jA_n$.

$$x \in \mathrm{Ker}\,(\varphi_j\colon N_jA_n \longrightarrow A_n/D_jA_n).$$

Dann liegt die Restklasse von x im Kern der rechten Abbildung von (III), also im Bild der linken,

$$x = \varepsilon^j y \bmod D_{j-1}A_n \text{ für ein } y \in A_{n-1}.$$

Indem wir die Restklasse von y im linken Objekt von (III) ersetzen durch dessen Urbild beim oberen horizontalen Morphismus des Diagramms (II) erreichen wir

$$y \in N_{j-1}A_{n-1}.$$

Es folgt $\varepsilon^j y \in N_{j-1}A_n$ (linke vertikale Abbildung von (II)) und wegen

$$x \in N_jA_n \subseteq N_{j-1}A_n$$

sogar

$$x - \varepsilon^j y \in D_{j-1}A_n \cap N_{j-1}A_n.$$

Weil die untere horizontale Abbildung von (II) injektiv ist, ist dieser Durchschnitt trivial, d.h.

$$x = \varepsilon^j y,\ y \in N_{j-1}A_{n-1}.$$

Wegen $x \in N_jA_n$ ist aber $\partial^j x = 0$, also

$$0 = \partial^j x = \partial^j \varepsilon^j y = y,$$

also $x = \varepsilon^j y = \varepsilon^j 0 = 0$. Damit ist die Injektivität von φ_j bewiesen.

QED.

Bemerkungen.

(i) Damit können wir N(A) mit A/D(A) identifizieren, d.h. als Komplex betrachten, der von den nicht-entarteten Simplexen erzeugt wird.

(ii) Wir sind jetzt in der Lage die Homologie von N(A) und A zu vergleichen.

Vergleich der Homologie von N(A) und A

Die natürliche Einbettung

$$N(A) \longrightarrow A$$

induziert für jede simpliziale abelsche Gruppe A einen Isomorphismus der Homologie-Gruppen

$$H_n(N(A)) \xrightarrow{\cong} H_n(A).$$

Beweis (vgl. Weibel, Th. 8.3.8). Betrachten wir die kurze exakte Sequenz von Komplex-Morphismen

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/D(A) \longrightarrow 0.$$

Wegen der Isomoprhie $N(A) \xrightarrow{\cong} A/D(A)$, zerfällt diese exakte Sequenz, und des gilt

$$A = D(A) \oplus N(A)$$

also

$$H_n(A) = H_n(D(A)) \oplus H_n(N(A)).$$

Es reicht also, zu zeigen,

$$H_n(D(A)) = 0 \text{ für alle } n.$$

Zum Beweis versehen wir den Komplex D(A) mit der folgenden (aufsteigenden) Filtration FDA.

$$F_pDA_n := \begin{cases} 0 & \text{für } p < 0 \\ \varepsilon^0 A_{n-1} + \ldots + \varepsilon^p A_{n-1} & \text{für } 0 \le p \le n \\ DA_n & \text{für } n < p \end{cases}$$

Nach Definition ist diese Filtration für jedes feste n endlich, d.h.

$$F_pDA_n / F_{p-1}DA_n$$

ist jeweils nur für endlich viele p von Null verschieden. Dieselbe Rechnung wie für D(A) zeigt, die graduierten Untergruppen F_pDA von D(A) bilden Teilkomplexe: für

$$a = \varepsilon^j(b) \text{ mit } b \in A_{n-1} \text{ und } j \le p$$

gilt

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial^i \varepsilon^j(b) \\ &= \partial^0 \varepsilon^j(b) - \ldots + (-1)^{j-1} \partial^{j-1} \varepsilon^j(b) \\ &\quad + \text{zwei Glieder, die sich wegheben} \\ &\quad + (-1)^{j+2} \partial^{j+2} \varepsilon^j(b) + \ldots + (-1)^n \partial^n \varepsilon^j(b) \\ &= \varepsilon^{j-1} \partial^0(b) - \ldots + (-1)^{j-1} \varepsilon^{j-1} \partial^{j-1}(b) \\ &\quad + (-1)^{j+2} \varepsilon^j \partial^{j+1}(b) + \ldots + (-1)^n \varepsilon^j \partial^{n-1}(b) \\ &\in F_p DA_{n-1} \end{aligned}$$

Betrachten wir die zugehörige homologische Spektralsequenz

$$E^1_{pq} = H_{p+q}(F_p DA/F_{p-1} DA) \Rightarrow H_n(DA).$$

Zum Beweis der Behauptuing reicht es zu zeigen, die Faktorkomplexe

$$F_p DA/F_{p-1} DA$$

sind exakte Sequenzen, denn dann entartet die Spektralsequenz und ihr Limes-Term muß gleich null sein. Nach Definition bestehen Surjektionen

$$\varepsilon^p A_{n-1} \twoheadrightarrow (F_p DA/F_{p-1} DA)_n$$

(und für $n < p$ steht rechts die triviale abelsche Gruppe). Ist $x \in A_{n-1}$, so gilt für die Restklassen in der rechts stehenden Faktorgruppe

$$\begin{aligned} [\partial \varepsilon^p x] &= [\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial^i \varepsilon^p x] \\ &= [\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \varepsilon^{p-1} \partial^i x] \\ &\quad + \text{zwei Glieder, die sich wegheben} \\ &\quad + [\sum_{i=p+2}^{n} (-1)^i \varepsilon^p \partial^{i-1} x] \\ &= [\sum_{i=p+2}^{n} (-1)^i \varepsilon^p \partial^{i-1} x] \end{aligned}$$

Wir ersetzen x durch $\varepsilon^p x$ und erhalten

$$[\partial (\varepsilon^p)^2 x] = [\sum_{i=p+2}^{n+1} (-1)^i \varepsilon^p \partial^{i-1} \varepsilon^p x]$$

Zum andern wenden wir ε^p auf beiden Seiten der obigen Formel an und ziehen das Ergebnis auf beiden Seiten ab:

$$[\partial (\varepsilon^p)^2 x - \varepsilon^p \partial \varepsilon^p x] = [\sum_{i=p+2}^{n+1} (-1)^i \varepsilon^p \partial^{i-1} \varepsilon^p x] - [\sum_{i=p+2}^{n} (-1)^i (\varepsilon^p)^2 \partial^{i-1} x]$$

Wir ersetzen wieder in der ersten Summe rechts $\partial^{i-1} \varepsilon^p x$ durch $\varepsilon^p \partial^{i-2} x$ (außer im Fall $i = p+2$, in welchem $\partial^{i-1} \varepsilon^p x = x$ ist):

$$[\partial (\varepsilon^p)^2 x - \varepsilon^p \partial \varepsilon^p x] = [(-1)^{p+2} \varepsilon^p x] + [\sum_{i=p+3}^{n+1} (-1)^i (\varepsilon^p)^2 \partial^{i-2} x] - [\sum_{i=p+2}^{n} (-1)^i (\varepsilon^p)^2 \partial^{i-1} x]$$

$$= [(-1)^p \varepsilon^p x]$$

Mit

$$s^n = (-1)^p \varepsilon^p : (F_p DA/F_{p-1} DA)_n \longrightarrow (F_p DA/F_{p-1} DA)_{n+1}$$

gilt damit auf den Elementen des Faktorkomplexes:

$$\partial \circ s^n - s^{n-1} \circ \partial = Id$$

Mit anderen Worten, die s^n definieren eine Homotopie von Kettenkomplexen. Insbesondere induziert die identische Abbildung auf der Homologie von $F_p DA/F_{p-1} DA$ dieselbe Abbildung wie die Nullabbildung. Das in nur möglich, wenn die Homologie des Komplexes trivial ist, d.h. wenn er eine exakte Sequenz bildet.
QED.

Bemerkung.
Wir sind jetzt soweit, die Argumente von Quillen für die Isomorphie

$$H_n(BC, L) \overset{\cong}{\longrightarrow} H_n(C, L)$$

der singulären Homologie des klassifizierenden Raums einer Kategorie C mit der Homologie von C nachzuvollziehen.

Abgeleitete Funktoren

Literatur

Genaueres zur Theorie der abgeleiteten Funktoren findet man zum Beispiel in den folgenden Büchern bzw. Artikeln.

Cartan & Eilenberg: Homological algebra
Bucur & Deleanu: Introduction to the theory of categories and functors
Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique

Injektive und projektive Objekte

Ein Object I einer abelschen Kategorie C heißt injektiv , wenn der kontravariante Hom-Funktor

$$Hom(?, I).\ C \longrightarrow Ens$$

exakt ist. Da der Hom-Funktor stets linksexakt ist, bedeutet dies, für jeden Monomorphismus

$$A \hookrightarrow B$$

der Kategorie C läßt sich jeder Morphismus $A \longrightarrow I$ zu einem Morphismus auf B fortsetzen. Dual heißt ein Objekti von C projektiv, wenn der kovariante Hom-Funktor

$$Hom(P, ?): C \longrightarrow Ens$$

exakt ist. Da der Hom-Funktor stets linksexakt ist, bedeudet dies, für jeden Epimorphismus

$$A \twoheadrightarrow B$$

der Kategorie C läßt sich jeder Morphismus $P \longrightarrow B$ über A faktorisieren.

Zum Beispiel ist in der Kategorie R-Mod der linken Moduln über einem R alle freien R-Moduln F projektiv: Für jeden Morphismus

$$F \longrightarrow B$$

wähle man ein freies Erzeugendensystem von F, bilde dieses nach B ab und fixiere Urbilder in A der erhaltenen Bilder. Die freien Erzeugenden von F bilde man dann in diese fixierten Urbilder ab. Durch lineare Fortsetzung erhält man einen Morphismus

$$F \longrightarrow A,$$

der zu der gesuchten Faktorisierung führt. Allgemeiner ist ein R-Modul genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien R-Moduls ist.

Man sagt, eine abelsche Kategorie C hat genügend viele injektive Objekte, wenn jedes Objekt Teilobjekt eines injektiven ist. Die Kategorie C hat genügend viele projektive Objekte, wenn jedes Objekt Faktorobjekt eines projektiven ist. Die Kategorien Ab und allgemeiner R-Mod sind Beispiele für Kategorien mit genügend vielen injektiven und genügend vielen projektiven Objekten.

Halbexakte Funktoren

Ein additiver Funktor $F: C \longrightarrow D$ der abelschen Kategorien C und D heißt linksexakt, wenn für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ in C die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

exakt ist. Er heißt rechtsexakt, wenn die Sequenz

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

stets exakt ist. Die Hom-Funktoren

$$\mathrm{Hom}(X, ?): C \longrightarrow Ab$$

$$\mathrm{Hom}(?,X): C^{op} \longrightarrow Ab$$

sind für jede abelsche Kategorie C und jedes Objekt X von C linksexakt. Das Tensorprodukt

$$M \otimes_R ?: R\text{-Mod} \longrightarrow Ab$$

ist für jeden R-Modul M rechtsexakt.

Rechtsabgeleitete Funktoren

Sei jetzt

$$F: C \longrightarrow D$$

ein additiver linksexakter Funktor abelscher Kategorien. Eine Folge von additiven Funktoren

$$R^iF: C \longrightarrow D \ (i = 0, 1, 2, ...)$$

heißt rechtsabgeleitet von F, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) $R^0F = F$

(ii) Für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

in C gibt es für jedes i Morphismen (genannt Zusammenhangsmorphismen oder auch Bockstein-Operatoren) $\delta: R^iF(C) \longrightarrow R^{i+1}F(A)$ mit der Eigenschaft, daß die folgende lange Sequenz exakt ist.

$$0 \longrightarrow R^0F(A) \longrightarrow R^0F(B) \longrightarrow R^0F(C) \longrightarrow R^1F(A) \longrightarrow ...$$

$$... \longrightarrow R^i(A) \longrightarrow R^iF(B) \longrightarrow R^iF(C) \longrightarrow R^{i+1}F(A) \longrightarrow ...$$

(iii) Die langen exakten Sequenzen von (ii) verhalten sich funktoriell bezüglich der kurzen exakten Sequenzen (1).

(iv) Für jedes injektive Objekt I von C und jedes $i > 0$ gilt $R^iF(I) = 0$.

Existenz abgeleiteter Funktoren

Der wichtigste Satz der homologischen Algebra besagt, daß die abgeleiteten Funktoren stets existieren und bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt sind, falls die Kategorie C genügend viele injektive Objekte besitzt.
Ist

$$F: C \longrightarrow D$$

ein additiver rechtsexakter Funktor, so kann man diesn als addiven linksexakten Funktor

$$F: C^{op} \longrightarrow C^{op}$$

ansehen. Die zugehörigen abgeleiteten Funktoren heißen dann linksabgeleitete Funktoren von F und werden mit

$$L_iF$$

bezeichnet. Sie existieren offensichtlich und sind bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt, wenn C genügend viele projektive Objekte besitzt.

Berechnung durch injektive bzw. projektive Auflösungen

Seien $F: C \longrightarrow D$ ein linksexakter Funktor, X ein Objekt von C und

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow ...$$

eine injektive Auflösung von X, d.h. eine exakte Sequenz in C, wobei alle I^n injektiv sind. Dann gilt

$$R^iF(X) \cong H^i(F(I^*)) \text{ (natürliche Isomorphie).}$$

Seien jetzt $F: C \longrightarrow D$ ein rechtsexaker Funktor, X ein Objekt von C und

$$... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von X, d.h. eine exakte Sequenz in C, wobei alle P_n projektiv sind. Dann gilt

$$L_iF(X) \cong H_i(F(P_*)) \text{ (natürliche Isomophie).}$$

Beispiel: Ext

Die rechtsabgeleiteten Funktoren von $Hom_R(? , N): R\text{-Mod}^{op} \longrightarrow Ab$ werden mit

$$Ext^i_R(? , N)$$

bezeichnet. Die rechtsabgeleiteten Funktoren von $Hom_R(M, ?): R\text{-Mod} \longrightarrow Ab$ werden mit

$$Ext^i_R(M, ?)$$

bezeichnet.

Beispiel: Tor

Die linksabgeleiteten Funktoren von $M\otimes_R: R\text{-Mod} \longrightarrow Ab$ werden mit

$$Tor^R_i(M, ?)$$

bezeichnet. Die linksabgeleiteten Funktoren von $\otimes_R N: Mod\text{-}R \longrightarrow Ab$ werden mit

$$\mathrm{Tor}_i^R(?, N)$$

bezeichnet.

Beispiel: Gruppen-Homologie

Seien G eine Gruppe und R := $\mathbb{Z}$[G] der Gruppen-Ring und A ein G-Modul. Dann gilt

$$H_n(G, A) = \mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z},A).$$

Beispiel: Gruppen-Kohomologie

Seien G eine Gruppe und R := $\mathbb{Z}$[G] der Gruppen-Ring und A ein G-Modul. Dann gilt

$$H^n(G, A) = \mathrm{Ext}_R^n(\mathbb{Z}, A).$$

∂-Funktoren

Seien C und D abelsche Kategorien. Ein ∂-Funktor T: C $\longrightarrow$ D ist eine Familie von additiven Funktoren

$$T^i: C \longrightarrow D \quad i = 0, 1, 2, ...$$

so daß zu jeder kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in C ein Komplex

$$0 \longrightarrow T^0A \longrightarrow T^0B \longrightarrow T^0C \longrightarrow T^1A \longrightarrow ...$$

$$... \longrightarrow T^iA \longrightarrow T^iB \longrightarrow T^iC \longrightarrow T^{i+1}A \longrightarrow ...$$

in D gehört und dieser sich funktoriell verhält.

Der ∂-Funktor heißt <u>exakt</u>, wenn die Komplexe sogar exakte Sequenzen sind. Der ∂-Funktor heißt <u>universell</u>, wenn es für jeden weiteren ∂-Funktor T':C $\longrightarrow$ D und jeden funktoriellen Morphismus $T^0 \longrightarrow T'^0$ genau eine Familie von funktoriellen Morphismen $T^i \longrightarrow T'^i$ (i = 0, 1, 2, ...) gibt, welche mit den Zusammenhangsmorphismen kommutieren.

Ein Funktor F: C$\longrightarrow$D heißt <u>effaceable</u>, wenn es für jedes Object A von C einen Monomorphismus u: A $\longrightarrow$ B gibt mit F(u) = 0. Er heißt coeffaceable, wenn es für jedes Objekt A von C einen Epimorphismus v: B $\longrightarrow$ A gibt mit F(v) = 0.

<u>Satz</u> (vgl. Hartshorne, Theorem 1.3.A)
Ein ∂-Funktor T mit T^i effaceable für jedes i > 0 ist universell.

<u>Satz</u> (vgl. Hartshorne, Corollary 1.4)
Seien C, D abelsche Kategorien, wobei C genügend viele injektive Objekte besitze. Dann gilt:

(i) Für jeden linksexakten Funktor F: C $\longrightarrow$ D bilden die rechtsabgeleiteten Funktoren einen universellen ∂-Funktor mit $R^0F = F$.

(ii) Für jeden universellen ∂-Funktor T: C $\longrightarrow$ D ist T^0 linksexakt und T^i isomorph zu R^iT^0.

Spektralsequenzen

Literatur

Eine Einführung in die Theorie der Spektralsequenzen findet in den folgenden Büchern bzw. Artikeln:

Spanier: Algebraic topologie
(homologische Bezeichnungsweise wie bei Serre).

Grothendieck: Sur quelques points d'alegèbre homologique, Algebre commutative)
(kohomologische Bezeichnungsweise wie bei Deligne, Theorie de Hodge II)

Weibel: Introduction to homological algebra
(beide Bezeichnungsweisen)

Jardine: Lectures on homotopy theory

Einführung

In erster Näherung ist eine Spektralsequenz $E = \{E_r\}$ eine Folge von Komplexen

E_r , $r = r_0, r_0+1, \ldots$

(in einer abelschen Kategorie) mit der Eigenschaft, daß die Kohomologie-Objekte von E_r gerade die Objekte von E_{r+1} sind:

$H^n(E_r) = E^n_{r+1}$.

Weiter gehört zu einer Spektralsequenz ein weiterer Komplex

E_∞

(meistens mit trivialen Randoperatoren), der mit einer absteigenden Filtration

$FE_\infty = \{F^pE_\infty\}$

versehen ist, d.h. mit einer absteigendnen Folge von Teilkomplexen

$E_\infty \supseteq F^pE_\infty \supseteq F^{p+1}E_\infty$

von E_∞. Dieser filtrierte Komplex heißt Limes der Spektralsequenz. Im Idealfall gibt es für jedes n ein s, sodaß die auf E^n_r definierten Randoperatoren für $r \geq s$ gleich Null sind und dasselbe für die Randoperatoren mit Werten in E^n_r gilt, sodaß der Übergang zur Kohomologie das Objekt nicht verändern,

$E^n_r = E^n_{r+1} = E^n_{r+2} = \ldots$

Man sagt in dieser Situation, die Spektralsequenz <u>konvergiert</u>, wenn gilt

$E^n_r \cong F^nE_\infty/F^{n+1}E_\infty$,

für alle n und alle hinreichend großen r und schreibt

$E_{r_0} \Rightarrow E_\infty$.

Die eigentlich interessierenden Daten einer Spektralsequenz sind der Anfangsterm E_{r_0} und deren Limes E_∞.

In allen Anwendungen versucht man in irgendeiner Weise diese beiden Terme zu vergleichen. Im konvergenten Fall weiß man zum Beispiel, daß alle Eigenschaften des Anfangsterms, die beim Übergang zur Kohomologie und zum graduierten Objekt erhalten bleiben, auch Eigenschaften des Limes sind (und umgekehrt).

Solche Eigenschaften sind zum Beispiel gewisse Euler-Charakteristiken oder gewissen Hilbert-Funktionen.

Außerdem lassen sich mit Hilfe von Spektralsequenzen zahllose exakte Sequenzen unterschiedlicher Längen konstruieren.

Um die beschriebene Konstruktion anwendbar zu machen, muß man sie allerdings noch etwas modifizieren. Die angegebene Konvergenzbedingung ist zu streng (und ist so gut wie nie erfüllt). Man muß jedes der Objekte E_r^n noch in weitere Teile zerlegen und nur von jedem dieser Teile fordern, daß es ein r gibt, von dem ab sich dieser Teil nicht mehr ändert (wenn die Anzahl dieser Teile unendlich ist, kann es dabei sehr wohl vorkommen, daß E_r^n beim Vergrößern von r niemals unverändert bleibt. Genauer: wir zerlegen die E_r^n in direkte Summanden.

Definition

Eine (kohomologische) Spektralsequenz E in einer abelschen Kategorie A (welche im Grad r_0 beginnt) besteht aus:

(i) Einer Familie $\{E_r^{pq}\}$ von Objekten aus A, wobei p und q alle ganzen Zahlen durchlaufen und r alle ganzen Zahlen $\geq r_0$.

(ii) Einer Familie von Morphismen $d_r^{pq}: E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ aus A, welche Differentiale der Spektralsequenz heißen und welche für alle p, q und $r \geq r_0$ definiert sind und die Eigenschaft haben, daß die Zusammensetzung von je zwei solchen Morphismen, falls definiert, gleich Null ist.

(iii) Für jedes p, q und $r \geq r_0$ gilt

$$E_{r+1}^{pq} \cong \mathrm{Ker}(d_r^{pq})/\mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1}).$$

Bemerkungen

(i) Die Objekte

$$E_r^n := \oplus_{p+q=n} E_r^{pq} \qquad (1)$$

bilden die Objekte eines Komplexes E_r^*, dessen Randoperatoren $d: E_r^n \longrightarrow E_r^{n+1}$ durch die Differentiale der Spektralsequenz definiert sind und die direkten Zerlegungen respektieren. Insbesondere bestehen Isomorphien

$$H^n(E_r^*) = E_{r+1}^n$$

von graduierten Objekten.

(ii) Nach Definition ist E_{r+1}^{pq} ein Faktorobjekt eines Teilobjektes von E_r^{pq}. Es besteht somit die Implikation

$$E_r^{pq} = 0 \Rightarrow E_{r+1}^{pq} = 0.$$

(iii) Eine (kohomologische) Spektralsequenz im ersten Quadranten ist eine Spektralsequen $E = \{E_r^{pq}\}$ mit

$$E_r^{pq} = 0 \text{ für alle Paare } (p,q) \text{ mit } p < 0 \text{ oder } q < 0.$$

(iv) Den Begriff der homologischen Spektralsequenz erhält man, indem man die Bezeichnungsweise wie folgt ändert.

$$E^{r}_{pq} := E_{r}^{-p,-q}$$

Konvergenz von Spektralsequenzen

Eine kohomologische Spektralsequez $E = \{E_r^{pq}\}$ heißt beschränkt, wenn es für jedes n nur endliche viele $E_{r_0}^{pq}$ mit p+q = n gibt, welche von Null veschieden sind. Für jedes Paar (p, q) gibt es dann ein s mit der Eigenschaft, daß die auf E_r^{pq} mit $r \geq s$ definierten Differentiale Werte im Nullobjekt annehmen und die Differentiale, welche Werte in E_r^{pq} annehmen, auf dem Nullobjekt definiert sind. Es gilt also

$$E_{r+1}^{pq} = E_r^{pq} \text{ für alle } r \geq s.$$

Wir setzen

$$E_{\infty}^{pq} = E_r^{pq} \text{ mit r hinreichend groß.}$$

Falls es einen Komplex H* gibt mit endlicher Filtration FH* (d.h. ein F^pH^* ist Null ein anderes gleich H*) mit

$$F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q} = E_{\infty}^{pq}$$

für alle p und alle q, so sagt man, die Spektralsequenz konvergiert gegen H* und schreibt

$$E_{r_0}^{pq} => H^{p+q}$$

Eine kohomologische Spektralsequenz $E = (E_r^{pq}\}$ heißt nach unten beschränkt (eigentlich sollte es ‘nach links beschränkt heißen), wenn es für jedes n ein s = s(n) gibt mit der Eigenschaft, daß die Glieder des Grades n,

$$E_{r_0}^{pq} \text{ mit } p + q = n$$

gleich Null sind für p < s:

$$E_{r_0}^{pq} = 0 \text{ für } p + q = n \text{ und } p < s(n).$$

Bemerkungen

(i) Beschränkte Spektralsequenzen sind nach unten beschränkt.

(ii) Spektralsequenzen in der rechten Halbebene sind nach unten beschränkt, müssen aber nicht beschränkt sein.

Die Limes-Terme einer Spektralsequenz

Das Objekt E_{r+1}^{pq} ist ein Subfaktor von E_r^{pq}. Da Subfaktoren von Subfaktoren bis auf Isomorphie wieder Subfaktoren sind, kann man die E_r^{pq} für alle r als Subfaktoren von $E_{r_0}^{pq}$ auffassen.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{Ker}(\rho) \subseteq \rho^{-1}(\mathrm{Ker}(\rho')) \subseteq \rho^{-1}(\rho'^{-1}(Z')) \subseteq \rho^{-1}(Y') \subseteq & Y & \subseteq X \\ & & & & & \downarrow\rho \\ 0 \in \mathrm{Ker}(\rho') \subseteq & \rho'^{-1}(Z') & \subseteq & Y' & \subseteq & Z \\ & & & & \downarrow\rho' \\ & & & 0 \in & Z' & \subseteq & W' \end{array}$$

Genauer, es gibt Teilobjekte

$$0 = B_{r_0}^{pq} \subseteq \ldots \subseteq B_r^{pq} \subseteq B_{r+1}^{pq} \subseteq .. \subseteq Z_{r+1}^{pq} \subseteq Z_r^{pq} \subseteq \ldots \subseteq Z_{r_0}^{pq} = E_{r_0}^{pq}$$

mit

$$E_r^{pq} = Z_r^{pq}/B_r^{pq} \text{ alle p, q und } r \geq r_0$$

Wir setzen

$$Z_\infty^{pq} := \bigcap_{r=r_0}^{\infty} Z_r^{pq}$$

$$B_\infty^{pq} := \bigcup_{r=r_0}^{\infty} B_r^{pq}$$

$$E_\infty^{pq} := Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq}$$

Man beachte, im Fall einer beschränkten Spektralsequenz sind die obigen Filtrationen endlich, und für jedes Paar (p,q) gibt es ein r, von welchem ab gilt

$$Z_\infty^{pq} = Z_r^{pq}\ ,\ B_\infty^{pq} = B_r^{pq},\ E_\infty^{pq} = E_r^{pq}.$$

Regularität, schwache Konvergenz, Approximation, Konvergenz

Eine Spektralsequenz $E = (E_r^{pq}\}$ heißt regulär, wenn es für jedes Paar (p,q) ein s gibt, so daß die auf E_r^{pq} definierten Differentiale Null sind für alle $r \geq s$:

$$d_r^{pq} = 0 \text{ für } r \geq s = s(p,q).$$

Die E_r^{pq} sind dann von dieser Stelle s = s(p,q) an Faktorobjekte voneinander und bilden für jedes feste (p,q) ein direktes System.

Eine Spektralsequenz $E = (E_r^{pq})$ konvergiert schwach gegen H*, wenn es auf H* eine Filtration FH* gibt mit

$$E_\infty^{pq} = F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q} \text{ für alle p und alle q.}$$

Gilt außerdem noch

$$\bigcap F^pH^* = 0 \text{ und} \bigcup F^pH^* = H^*$$

(d.h. die Filtration ist separiert und ausschöpfend), so sagt man, die Spektralsequenz approximiert H*.

Eine Spektralsequenz $E = \{E_r^{pq}\}$ konvergiert gegen H*, wenn sie H* approximiert, regulär ist und für jedes n gilt

$$H^n = \varprojlim_p H^n/F^pH^n.$$

Bemerkungen

(i) Jede schwach konvergente Spektralsequenz approximiert $\bigcup F^pH^*/\bigcap F^pH^*$.

(ii) Eine nach unten beschränkte Spektralsequenz konvergiert gegen H*, wenn sie H* approximiert, denn die Limes-Bedingung ist für nach unten beschränkte Spektralsequenzen automatisch erfüllt: es gibt für jedes n ein p mit $F^pH^n = 0$.

(iii) Die Spektralsequenzen bilden eine Kategorie. Die Morphismen werden in der naheliegenden Weise definiert (vgl. auch Grothendieck, Sur quelques point's). Es ist nicht schwer, zu zeigen, jeder Morphismus von konvergierenden Spaktralsequenzen

$$f:E \longrightarrow E',$$

mit der Eigenschaft, daß es für jedes Paar (p,q) ein r gibt, so daß

$$E_r^{pq} \longrightarrow E'^{pq}_r$$

ein Isomorphismus ist, induziert einen Isomorphismus $H^* \longrightarrow H'^*$ (von graduierten Objekten, nicht notwendig von Komplexen).

Konstruktion von Spektralsequenzen

(mit Hilfe von filtrierten Komplexen)

Seien K ein Komplex mit den Differential ∂: $K \to K$ (des Grades 1) und

$$F = \{F^p\}_{p\in Z}$$

eine absteigende Filtration durch Teilkomplexe von K mit folgenden Eigenschaften

(a) Für jedes n gibt es ein p mit $F^pK^n = K^n$ (d.h. die Filtration ist in jedem Grad nach oben beschränkt)[1].

(b) Für jedes n gibt es ein p mit $F^p \cap K^n = 0$ (d.h., die Filtration ist in jedem Grad nach unten beschränkt).

Dann gibt es eine Spektralsequenz des Typs E_1 mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \Rightarrow H^n(K).$$

Die Differentiale des Anfangsterms E_1^{pq} sind gerade die Zusammenhangshomomorphismen der langen Kohomologiesequenz des Tripels (F^p, F^{p+1}, F^{p+2}).

Konstruktion

(vgl. Spanier oder Godement oder meine Vorlesungsnotizen zu den Gemischten Hodge-Strukturen).

Man setzt:

$$Z_r^p := \{c\in F^pK \mid \partial c\in F^{p+r}K\} \qquad (\approx Z(F^pK/F^{p+r}K) \text{ für } r\geq 0,\ F^pK \text{ sonst})$$

$$Z_\infty^p := \{c\in F^pK \mid \partial c = 0\} \qquad (= Z(F^pK))$$

Dies sind graduierte Moduln bezüglich einer Graduierung, die von der des Komplexes K kommt (bis auf eine Verschiebung):

$$Z_r^{p,q} := \{c\in F^pK^{p+q} \mid \partial c\in F^{p+r}K\}$$

$$Z_\infty^{p,q} := \{c \in F^pK^{p+q} \mid \partial c = 0\}$$

Es gilt dann:

$$\partial Z_{r-1}^{p-r+1} \subseteq \partial K \bigcap F^pK \subseteq Z_r^p \text{ und } Z_{r-1}^{p+1} \subseteq Z_r^p$$

Damit ist das folgende Faktor-Objekt wohldefiniert:

$$E_r^p := Z_r^p / (\partial Z_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}) \qquad (0 \text{ im Fall } r < 0)^1.$$

Weiter gilt

$$\partial K \bigcap F^pK \subseteq Z_\infty^p \text{ und } Z_\infty^{p+1} \subseteq Z_\infty^p$$

d.h. das folgende Faktor-Objekt ist wohldefiniert:

$$E_\infty^p := Z_\infty^p / (\partial K \cap F^p + Z_\infty^{p+1})$$

Die beiden Spektralsequenzen zu einem Doppelkomplex

(bezüglich der vertikalen und der horizontalen Filtration).

Sei ein Doppelkomplex K gegeben, d.h.eine von zwei Indizes abhängige Familie von Homomorphismen

$$d_I^{p,q}: K^{p,q} \longrightarrow K^{p+1,q} \quad \text{und} \quad d_{II}^{p,q}: K \longrightarrow K^{p,q+1}$$

mit $p,q \in \mathbb{Z}$ wobei gilt

$0 = d_I \circ d_I$ (‘horizontale Differentiale’)

$0 = d_{II} \circ d_{II}$ (‘vertikale Differentiale’)

$0 = d_I \circ d_{II} + d_{II} \circ d_I$

Wir nehmen weiter an, für jedes n gibt es nur endlich viele Paare (p, q) mit p + q = n und $K^{pq} \neq 0$:

$$K^{pq} = 0 \text{ für fast alle } (p, q) \text{ mit } p+q = n.$$

Wir bezeichnen den zugehörigen einfachen Komplex mit

$$\text{tot}(K)$$

oder ebenfalls mit K, d.h. es sei

$K^n := \oplus_{p+q=n} K^{p,q}$

$d \quad := d_I + d_{II}$ das Differential von K.

Wir versehen diesen Komplex auf zweierlei Weise mit einer Filtration.

$$F_I^pK := \oplus_{p' \geq p} K^{p'q'}$$

$$F_{II}^qK := \oplus_{q' \geq q} K^{p'q'}$$

Beide Filtrationen sind offensichtlich in jedem Grad nach oben und unten beschränkt1. Es gibt also zwei Spektralsequenzen, die gegen denselben Limes konvergieren:

$$E_1^{pq} = H_{II}^q(K^{p*}) \Rightarrow H^n(K).$$

$$E_1^{pq} = H_I^p(K^{*q}) \Rightarrow H^n(K).$$

Dabei bezeichne K^{p*} für jedes p den einfachen Komplex mit dem Differential $d_{II}|K^{p*}$ und

$$H_{II}^{q}(K^{p*})$$

dessen q-te Kohomologie. Analog bezeichne K^{*q} für jedes q den einfachen Komplex mit dem Differential $d_I|K^{*q}$ und

$$H_{I}^{p}(K^{*q})$$

dessen p-te Kohomologie. Wir schreiben im folgenden einfach $H_{II}^{q}(K)$ und $H_{I}^{p}(K)$ anstelle von $H_{II}^{q}(K^{p*})$ bzw. $H_{I}^{p}(K^{*q})$. Beide bilden als Glieder einer Spektralsequenz Komplexe. Aus der Konstruktion der Spektralsequenz zu einem filtrierten Komplex kann man eine Beschreibung von deren Differentialen gewinnen: sie werden gerade von den Differentialen d_I bzw. d_{II} induziert. Damit erhalten wir:

$$E_2^{pq} = H_I^p H_{II}^q(K) \Rightarrow H^n(K).$$

$$E_2^{pq} = H_{II}^q H_I^p(K) \Rightarrow H^n(K).$$

Man spricht von den beiden Spektralsequenzen eines Doppelkomplexes.

Beispiel. Hyperkohomologie-Spektralsequenzen

(vgl. Grothendieck)

Seien C und D abelsche Kategorien und $F: C \longrightarrow D$ ein additiver Funktor. Weiter seien

$$K$$

ein nach links beschränkter Komplex in C, d.h.

$$K_n = 0 \text{ für } n >> 0,$$

und

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L$$

eine injektive Auflösung von K in der Kategorie der Komplexe über C. Dann ist L ein Doppelkomplex über C und F(L) ein Doppelkomplex über D. Die zugehörigen beiden Spektralsequenze haben die Gestalt

$$IF_2^{p,q} = H^p(R^q F(K)) \Rightarrow H^n(\text{tot}(FL))$$

$$IIF_2^{p,q} = R^p F(H^q(K)) \Rightarrow H^n(\text{tot}(FL)).$$

wobei tot(FL) den zum Doppelkomplex FL gehörigen einfachen Komplex bezeichnet. Aus den beiden Spektralsequenzen ergibt sich, daß die Limes-Terme nicht von der speziellen Wahl der Auflösung L abhängen. Die

$$H^n(\text{tot}(FL))$$

heißen Hyperkohomologie von F im Komplex K und die beiden Spektralsequenzen heißen Hyperkohomologie-Spektralsequenzen von F in K.

Beispiel. Die Spektralsequenz einer Funktorkomposition

(vgl. Grothendieck)

Seien

$$F:C \longrightarrow C' \text{ und } G:C' \longrightarrow C''$$

zwei additive linksexakte Funktoren abelscher Kategorien.Es gelte

(a) C und C' besitzen genügend viele injektive Objekte (d.h. jedes Objekt sei Teilobjekt eines injektiven).
(b) F und G sind linksexakt.
(c) F überführt injektive Objekte in G-azyklische Objekte (d.h. solche, die R^qG für $q>0$ annulliert).

Dann existiert für jedes Objekt $A \in C$ eine Spektralsequenz in C",

$$E_2^{pq} = R^pG \circ R^qF(A) \Rightarrow R^n(G \circ F)(A)$$

Dies ergibt sich als Anwendung der beiden Hyperkohomologie-Spektralsequenzen.
Beweis-Idee: man wähle eine injektive Auflösung von A,

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^*$$

und betrachte die Hyperkohomologie-Spektralsequenzen von G in F(I*). Die Anfangsterme der einen sind gerade die der oben angegebenen Spektralsequenz. Die andere Sequenz entartet (alle Differentiale sind Null) und gestattet es, den gemeinsamen Limes-Term auszurechnen. Es ist gerade der Limes-Term der oben angegebenen Spektralsequenz.

Beispiel: Die Künneth-Spektralsequenz

Seien X und Y simpliziale Mengen und A eine abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Spektralsequenz

$$E^2_{p,q} = H_p(X, H_q(Y,A)) \Rightarrow H_{p+q}(X;Y, A).$$

Diese heißt Künneth-Spektralsequenz. Dabei Bezeichne X;Y die simpliziale Menge mit

$$(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})_n := X_n \times Y_n \text{ und } (\mathbb{X}\times\mathbb{Y})(f) = f\times f$$

für Morphismen f von d.

Bemerkungen

(i) Für jedes feste m ist auch durch

$$[n] \mapsto X_n \times Y_m \,,\; f \mapsto X(f)\times \mathrm{Id}_{X_m}$$

eine simpliziale Menge definiert mit der Realisierung

$$|X|\times Y_m.$$

Wir erhalten so einen simplizialen topologischen Raum

$$[m] \longrightarrow |X|\times X_m \,,\; f \mapsto |X|\times Y(f).$$

So ähnlich wie die Realisierung einer simplizialen Menge, kann man die Realisierung simplizialer topologischer Räume definieren und erhält so als Realisierung den topologischen Raum

$$|X|\times|Y|.$$

Nach dem Satz von Eilenberg-Zilver (siehe Gelfand & Manin) gilt

$$|X\times Y| = |X|\times|Y|.$$

(Nach Eilenberg-Zilver gilt die analoge Aussage für beliebige Bifunktoren

$$(\Delta\times\Delta)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens},$$

d.h. die Realisierung der Diagonalen ist gleich der iterierten Realisierung).

(ii) Die Künneth-Spektralsequenz ist eine Spektralsequenz zum Doppelkomplex

$$C_*(X)\otimes C_*(Y,A) = C_*(X)\otimes C_*(Y)\otimes A.$$

Die Komplexe der vertikalen Filtration dieses Doppelkomplexes haben die Gestalt

$$C_n(X)\otimes C_*(Y,A)$$

mit der Homologie

$$H_q(C_n(X)\otimes C_*(Y,A)) \cong C_n(X)\otimes H_q(C_*(Y,A)) = C_n(X)\otimes H_q(Y,A).$$

Die Isomorphie links besteht, weil die $C_n(X)$ freie abelsche Gruppen sind. Die Spektralsequenz bekommt die Gestalt

$$H_p(X, H_q(Y, A)) => H_{p+q}(C_*(X)\otimes C_*(Y)\otimes A).$$

Der einfache Komplex zum Doppelkomplex $C_*(X)\otimes C_*(Y)$ hat im Grad n die Gestalt

$$C_n(X\times Y) = (C_*(X)\otimes C_*(Y))_n = \oplus_{p+q=n} C_p(X)\otimes C_q(Y)$$

Der direkte Summand zum Paar (p,q) wird frei erzeugt von den Elementen der Gestalt

$$x\otimes y \text{ mit } x \in X_p \text{ und } y \in Y_q.$$

Sie entsprechen gerade den direkten Produkten aus einem p-Simplex und einem q-Simplex. Die durch X auf |X| definierte Triangulierung und die durch Y auf |Y| definierte Triangulierung definieren auf |X|×|Y| eine Zellzerlegung, und

$$C_*(X\times Y)\otimes A$$

ist gerade der Ketten-Komplex zu dieser Zellzerlegung. Seine Homologie ist deshalb gleich

$$H_n(C_*(X)\otimes C_*(Y)\otimes A) = H_n(|X|\times|Y|, A) = H_n(|X\times Y|, A) = H_n(X\times Y, A).$$

Beispiel. Die Lerray-Serre-Spektral-Sequenz

(vgl. Spanier)

Seien B ein linear zusammenhängender Zellkomplex und f: E $\longrightarrow$ B ein Hurewicz-Faser-Raum, d.h. f besitzt die Homotopie-Liftungseigenschaft für beliebige topologische Räume, d.h. jedes kommutative Diagramm von stetigen Abbildungen topologischer Räume der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X\times\{0\} & \xrightarrow{g_0} & E \\ \cap & & \downarrow f \\ X\times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

läßt sich kommutativ ergänzen durch eine stetitg Abbildung X×I $\longrightarrow$ E.

Für einen Punkt e $\in f^{-1}(b)$ aus der Faser über b $\in$ B und X = {e} ergibt sich insbesondere, daß sich jeder Weg in B mit dem Anfang in b anheben läßt zu einen Weg in E mit Anfang in e.

Für $X = f^{-1}(b)$ sieht man, daß jeder Weg

$$\gamma: I \longrightarrow B$$

in B mit dem Anfang in b eine stetige Abbildung

$$G: f^{-1}(b)\times I \longrightarrow E$$

mit $f(F(e, 1)) = \gamma(1)$ definiert, und damit insbesonder eine stetige Abbildung

$$E_{\gamma(0)} := f^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow f^{-1}(\gamma(1)) =: E_{\gamma(1)}$$

der Faser über dem Anfang von γ in die Faser über dem Ende von γ. Man kann zeigen (Spanier, Theorem 2.8.12), diese Abbildung ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt, und homotope Wege führen zu homotopen Abbildungen. Insbesonder ist die auf den Homologie-Gruppen induzierte Abbildung

$$\gamma_*: H_n(E_{\gamma(0)}) \longrightarrow H_n(E_{\gamma(1)})$$

eindeutig bestimmt und hängt nur von der Homotopie-Klasse von γ ab. Mit anderen Worten, für jedes n ist durch

$$x \mapsto H_n(E_x)\ ,\ \gamma \mapsto \gamma_*,$$

ein lokales System auf B definiert, welches wir mit $H_n(E_x)$ bezeichnen. Der Hurewicz-Faser-Raum definiert dann eine Spektralsequenz (Spanier, Theorem 9.3.16)

$$E^2_{pq} = H_p(B, H_q(E_x)) \Rightarrow H_{p+q}(E).$$

Sind B oder die Fasern einfach zusammenhängend, so ist das lokale System konstant und man kann $H_q(E_x)$ wie eine gewöhnliche abelsche Gruppe behandeln.

Bemerkung

Dieser Satz besitzt zahlreiche Variationen und Verallgemeinerungen. Seine natürliche Gestalt bekommt er im Kontext von simplizialen Mengen und Kan-Faser-Räumen. Seine erste Formulierung stammt von Serre und spielte eine wichtige Rolle bei der Berechnung der Homotopie-Gruppen von Sphären.

Literatur

Bass, H.

Bass, H.: Algebraic K-theory, Benjamin, New York 1968

Bourbaki, N.

Bourbaki, N.: Algèbre X: Algèbre homologique, Masson, Paris New York Milan 1980

Bucur, I., Deleanus, A.

Bucur, I., Deleanus, A. Introduction to the theory of categories and functors, Wiley & Sons, London New York Sydney 1968

Cartan, H., Eilenberg, S.

Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological algebra, Princeton University Press 1956

Cassels, J.W.S., Fröhlich, A.

Cassels, J.W.S., Fröhlich, A.: Algebraich number theory, Academic Press, London New York 1967

Dold, A.

Dold, A.:Lectures on algebraic topology, Springer, Heidelberg 1972

Dold, A., Thom, R.

Dold, A., Thom, R.: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, Ann. of Math. 67:2 (1958) 239-281.

Gabriel, P.

Gabriel, P.: Des categories abeliennes, Bull. Math. Soc. France 90 (1962), 323-448

Gabriel, P, Zisman, M.

Gabriel, P., Zisman, M.: Calculus of fractions and homotopy theory, Springer, New York 1967

Gelfand, S.I., Manin, Ju.I.

Gelfand, S.I., Manin, Ju.I.: Methods of homological algebra, Springer, Berlin 2003

Gersten, S.

[1] Gersten, S.: The relation between the K-theory of Karoubi and Villamayor and the K-theory of Quillen (preprint).
[2] Gersten, S.: K-theory of regular schemes, Bull. Amer. Math. Soc. (Jan. 1973)
[3] Gersten, S.: On some exact sequence in the higher K-theory of rings, these proceedings.
[4] Gersten, S.: Problems about higher K-functors, these proceedings.
[5] Gersten, S.: Higher K-theory of rings, these proceedings.

Grothendieck, A.

[1] Grothendieck, A.: Le groupe de Brauer I, Dix exposés sur la cohomologie des schemes, North-Holland Publ. Co. 1968.

[2] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohocu Math. J. 2:9 (1957), 119-221.

Heller, A.

Heller, A.: Homological algebra in abelian categories, Ann. of Math. 68 (1958), 484-525.

Hartshorne, R.

Hartshorne, R.: Algebraich geometry, Springer, New York 1977

Hirzebruch, F.

Hirzebruch, F.: Topological methods in algebraic geometry, Springer, Berlin 1966

Jardine, J.F.

Jardine, J. F.: Lectures on homotopy theory, University of Western Ontario 2009, www.math.uwo.ca/~jardine/papers/HomAlg/

Karoubi, M.

Karoubi, M.: K-theory, an introduction, Springer, Berlin 1978

Keller, B.

Keller, B.: Chain complexes and stable categories, Manuscripta Math. 67 (1990), 379-417

Milnor, J.

[1] Milnor, J.: The realization of a semi-simplicial complex, Ann. of Math. 65 (1957) 357-362.
[2] Milnor, J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959) 272-280.
[3] Milnor, J.: Introduction to algebraic K-theory, Princeton, New Jersey, 1971

Mumford, D.

Mumford, D.: Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies 59 (1966)

Palais, R.S.

Palais, R.S.: Seminar on the Atyiah-Singer index theorem, Princeton, New Jersey 1965

Pontrjagin, L.S.

Pontrjagin, L.S.: Grundzüge der kombinatorischen Topologie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

Segal, G.

[1] Segal, G.: Classifying spaces and spectral sequences, Publ. Math. IHES 34 (1968) 105-112.
[2] Segal, G.: Categories and cohomology theories, preprint, Oxford 1972

Spanier, E.H.

Spanier, E.H.:Algebraic topology, Mc-Graw-Hill, New York 1966

Switzer, R.M.

Switzer, R.M.:Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, New York 1975

Weibel, C.A.

Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra, Cambridge University Press 1994

Index

—A—

Abbildung
  zelluläre, 41
Abbildungskegel, 38
Abbildungszylinder, 38
abelsche Kategorie, 104
abgeschlossen
  gegenüber Erweiterungen, Kategorie, 72; 105
additiv, 80
additive Kategorie, 95
adjungiertes Paar, 93
Adjunktion von Zellen, 138
Anfang einer Kurve, 3
Anhebung, 11
approximiert, 153

—Ä—

äquivalente
  Kategorien, 95
äquivalente Kategorien, 95
Äquivalenz
  Homotopie-, 43
Äquivalenz von Kategorien, 33; 95

—A—

Auflösung
  injektive, 148
  projektive, 148
Automorphismus, 91
azyklisches Objekt, 157

—B—

Basisraum, 12
Basiswechsel-Funktor, 52
beschränkt, 152
beschränkter Komplex
  nach links, 156
bikartesisch, 113
Bild
  direktes, ener Präkofaser-Kategorie, 55
  inverses, einer Präfaser-Kategorie, 52
bisimpliziale Menge
  Realisierung einer, 70
bisimplizialer Raum, 57
Bockstein-Operatoren, 147
Bündel
  triviales, 12
Bündelraum, 12

—D—

darstellbar, 92
darstellendes Element, 92
darstellendes Objekt, 92
Deflation, 104
Diagonal-Einbettung, 97
Differential
  einer Spektralsequenz, 151
Dimension eines Simplex, 124
direktes Bild einer Präkofaser-Kategorie, 55
Doppelkomplex, 155
duale Kategorie, 41

—E—

Ecken, 18
effaceable, 149
Eilenberg-MacLane-Raum, 31
einfacher Komplex
  zu einem Doppelkomplex, 155
einpunktige Kategorie, 44
Ende einer Kurve, 3
Endomorphismus, 91
Ens
  Kategorie der Mengen, 21
entartetes Simplex, 25; 125
Entartungsabbildung
  einer simplizialen Menge, 21
  in der Kategorie d, 21
Epimorphismus, 91
  zulässiger, 72
Erweiterung
  eine gegenüber Erweiterungen abgeschlossene Kategorie, 72; 105
exakt, 149
exakte Kategorie, 104
exakte Kategorie, 73
exakte Kategorie (Vereinbarung), 76
exakter Funktor, 73
exaktes Paar von Morphismen, 104

—F—

Faser
  eines Funktors über einme Objekt, 52
  Homotopie-Faser, 59; 118
Faserbündel
  schwaches, 10
Faserbündel, 10
Faser-Kategorie, 53
Faserprodukt
  Homotopie-Faserprodukt, 61
Faserung
  Quasi-, 64; 122
Fibration
  Quasi-, 64; 122
filtrierende kleine Kategorie, 45
fundamentale Gruppe, 9
fundamentales Gruppoid eines topologischen Raums, 39
Funktor
  Basiswechsel-Funktor, 52
  exakter, 73
  Kobasiswechsel-Funktor, 55
  linksadjungierter, 93
  rechtsadjungierter, 93
  Source-Funktor, 55
  Target-Funktor, 55
  treuer, 95
  voller, 95
  völlig treuer, 95
  ∂-Funktor, 39
Funktoren
  quasi-inverse, 95

—G—

genügend viele injektive Objekte, 147
genügend viele projektive Objekte, 147
geometrische Realisierung, 18
  einer simplizialen Menge, 22
geordnetes n-Simplex, 20
gerichtete Kategorie, 45
glatten singulären Simplexe, 23
Grothendieck-Gruppe, 15
Gruppe
  K-Gruppe einer exakten Kategorie, 82
  K-Gruppe eines Rings, 85
  simpliziale abelsche, 36
Gruppe, fundamentale, 9

Gruppen-Homologie, 36
Gruppen-Kohomologie, 36
Gruppoid, 34
  fundamentales, eines topologischen Raums, 39
Gruppoid, 34

—H—

Homologie
  einer simplizialen abelschen Gruppe, 36
  einer simplizialen Menge, 26
  einer simplizialen Menge mit Koeffizienten in einem lokalen System, 29
Homologie einer Gruppe, 36
homologischen Spektralsequenz, 152
homologisches System von lokalen Koeffizienten, 26
homotop, 9
homotope Wege, 8
Homotopie, 11
Homotopie, 8
Homotopie von Kettenkomplexen, 146
Homotopie-Äquivalenz, 43
Homotopie-Faser, 118
Homotopie-Faser, 59
Homotopie-Faserprodukt, 61
Homotopie-Gruppe, erste, 9
Homotopie-Gruppe, n-te, 9
Homotopie-Gruppe, relative, n-te, 10
Homotopie-Gruppen, 32
homotopie-kartesisch, 61
homotopie-kartesisches Quadrat, 62
Hurewicz-Faser-Raum, 158
Hyperkohomologie-Spektralsequenzen, 156

—I—

idempotenter Morphismus, 103
Inflation, 104
injektiv, 146
injektive Auflösung, 148
injektiver Morphismus einer Subquotienten-Kategorie, 77
inverses Bild einer Präfaser-Kategorie, 52
Isomorphismus, 91

—K—

kartesisch
  homotopie-karteisches Quadrat, 62
Kategorie
  abelsche, 104
  abgeschlossene gegenüber Erweiterungen, 72; 105
  additive, 95
  Äquivalenz von, 95
  der f-Objekte über einem Objekt, 50
  der f-Objekte unter einem Objekt, 49
  einpunktige, 44
  Ens, der Mengen, 21
  exakte, 73; 104
  exakte (Vereinbarung), 76
  exakte, K-Gruppe einer, 82
  Faser-Kategorie, 53
  filtrierende, 45
  gerichtete, 45
  kontrahierbare kleine, 43
  Morphismus einer, 90
  Objekt einer, 90
  Präfaser-Kategorie, 52
  Präkofaser-Kategorie, 54
  Subquotienten-, 75
Kategorie, 90
Kategorie der Objekte über einem Objekt, 76
Kategorien
  äquivalente, 95
Kette
  einer simplizialen Menge, 25
  einer simplizialen Menge mit Koeffizienten in einem lokalen System, 29
Kette, n-dimensionale, eines topologischen Raums, 4
Kettenkomplex
  normalisierter, 36
K-Gruppe, 15
  einer exakten Kategorie, 82
K-Gruppe eines Rings, 85
klassifizierender Raum, 31
klassifizierender Raum der Gruppe G, 25
Kobasiswechsel-Funktor, 55
Koeffizienten
  lokale, homologische, 26
  lokale, kohomologische, 27
Kohomologie
  einer simplizialen Menge, 26
Kohomologie einer Gruppe, 36
Kohomologie. einer simplizialen Menge mit Koeffizienen in einem lokalen System, 29
kohomologisches System von lokalen Koeffizienten, 27
Kokette
  einer simplizialen Menge, 26
  einer simplizialen Menge mit Koeffizienten in einem lokalen System, 29
kompakt erzeugten Topologie, 41
kompakt-offenen Topologie, 117
Komplex
  einfacher, zu einem Doppelkomplex, 155
  Moore-Komplex, 141
  nach links beschränkter, 156
  normalisierter, 36; 141
Komplex der singulären Ketten, 6
Komposition
  Morphismen-, 90
Konflation, 104
konstantes lokales System, 28
kontrahierbare kleine Kategorie, 43
konvergierende Spektralsequenz, 152
konvergiert, 150
konvergiert, 153
konvergiert schwach, 153
Koseiten-Abbildung, 29
Künneth-Spektralsequenz, 157
Kurve eines topologischen Raums, 3
kurze exakte Sequenz, 147

—L—

linearen singulären Simplexe, 23
links beschränkter Komplex, 156
linksadjungierter Funktor, 93
lokale Koeffizienten
  homologische, 26
  kohomologische, 27
lokales System
  konstantes, 28

—M—

Menge
  bisimpliziale, Realisierung einer, 70
  Kategorie der Mengen Ens, 21
  simpliziale, 21; 124
Monomorphismus
  zulässiger, 72
Moore-Komplex, 141
morphismen-invertierend, 33
Morphismen-Komposition, 90
Morphismus
  Diagonal-, 97
  exaktes Paar von Morphismen, 104
  idempotenter, 103
  injektiver, einer Subquotienten-Kategorie, 77
  Null-Morphismus, 97
  Summen-, 97
  surjektiver, einer Subquotienten-Kategorie, 77
  zerfallender idempotenter, 103
  zulässiger Epimorphismus, 72
  zulässiger Monomorphismus, 72
Morphismus einer Kategorie, 90

—N—

nach unten beschränkt, 152
n-dimensionales Simplex, 18
Nerv, 30
nicht-entarteten p-Simplexen, 31
nicht-entarteten Punkt, 133
nicht-entartetes Simplex, 125
normalisierter Kettenkomplex, 36
normalisierter Komplex, 141
n-Simplex, 18; 124
n-Simplexe, 30
Null-Morphismus, 97
Null-Objekt, 95

—O—

Objekt
  azyklisches, 157
  Null-Objekt, 95
Objekt einer Kategorie, 90

—P—

Paar
  adjungiertes, 93
  exaktes, von Morphismen, 104
Präfaser-Kategorie, 52
Präkofaser-Kategorie, 54
Produkt
  Homotopie-Faserprodukt, 61
projektiv, 146
projektive Auflösung, 148
Projektivierung, 14
Punkt
  nicht-entareter, 133

—Q—

Quadrant
  erster, Spektralsequenz im, 151
Quadrat
  homotopie-kartesisches, 62
Quasi-Faserung, 64; 122
Quasi-Fibration, 122
Quasi-Fibration, 64
quasi-inverse Funktoren, 95
Quelle eines Morphismus, 90
Quotient
  zulässiger, in einer exakten Kategorie, 76

—R—

Rand
  einer simplizialen Menge, 26
Rand-Operator, 5
Raum
  triangulierter, 23
Realisierung
  geometrische, 18
  geometrische, einer simplizialen Menge, 22
Realisierung einer bisimplizialen Menge, 70
Realisierungsfunktor, 56
rechtsabgeleitet, 147
rechtsadjungierter Funktor, 93
regulär, 153
relative Homotopie-Gruppe, n-te, 10
Ring
  K-Gruppe eines, 85

—S—

Satz von Whitehead, 47
Schicht
  zulässige, in einer exakten Kategorie, 76
schwaches Faserbündel, 10
schwaches Vektorraum-Bündel, 12
Seite
  eines Simplex, 18
Seitenabbildung
  einer simplizialen Menge, 21
  in der Kategorie d, 21
Seiten-Abbildung, 23
Simplex
  Dimension eines, 124
  entartetes, 125
  geordnetes, 20
  n-dimensionales, 18; 21
  nicht-entartetes, 125
  n-Simplex, 18; 124
  n-Simplex, 21
  Seite eines, 18
Simplexe, 18

Simplexe der Dimension n, 124
simpliziale abelsche Gruppe, 36
simpliziale Menge, 21
simpliziale Menge, 30
simplizialen abelschen Gruppe, 36
simplizialen Menge, 124
simpliziales Objekt, 56
Simplizialkomplex, 18
Skellett, 136
Source-Funktor, 55
Spektralsequenz
  Differentiale einer, 151
  homologische, 152
  kohomologische, 151
  konvergierende, 152
  Künneth-Spektralsequenz, 157
Spektralsequenz, 151
Spektralsequenz im ersten Quadranten, 151
Subquotient
  zulässiger, in einer exakten Kategorie, 76
Subquotienten-Kategorie, 75
Summen-Morphismus, 97
surjektiv Morphismus einer Subquotienten-Kategorie, 77

—T—

Target-Funktor, 55
tautologisches Bündel, 14
tautologisches Bündel, 14
Teilobjekt
  zulässiges, in einer exakten Kategorie, 76
Topologie
  kompakt-offene, 117
treuer Funktor, 95
triangulierter Raum, 23
triviales Bündel, 12

—Ü—

Überlagerung
  unverzweigte, 115

—U—

universell, 31; 149
universelle Familie, 92
unverzweigte Überlagerung, 115
unzerlegbare, 103

—V—

Vektorraum-Bündel
  triviales, 12
Vektorraum-Bündel, schwaches, 12
Vereinbarung
  exakte Kategorien, 76
verträglich mit der Triangulierung, 24
voller Funktor, 95
völlig treuer Funktor, 95

—W—

Whitehead
  Satz von, 47

—Z—

Zelle
  Adjunktion von, 138
zelluläre Abbildung, 41
zerfallender idempotenter Morphismus, 103
Ziel eines Morphismus, 90
zulässige Schicht in einer exakten Kategorie, 76
zulässiger Epimorphismus, 72
zulässiger Monomorphismus, 72
Zulässiger Quotient in einer exakten Kategorie, 76
zulässiger Subquotient, 76
zulässiges Teilobjekt in einer exakten Kategorie, 76
Zusammenhangsmorphismen, 147
Zyklus
  einer simplizialen Menge, 25
Zyklus, n-dimensionaler, eines topologischen Raums, 5

—∂—

∂-Funktor, 39

Inhalt

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE K-THEORIE 1

BEZEICHNUNGEN 1

1. MOTIVATION 2

1.1. Homologie 3
1.1.1 Kurven, Ketten, Ränder, Zyklen, Homologie-Gruppen 3
1.1.2 Literatur 6
1.1.3 Eigenschaften 6

1.1.4 Anwendungen 7

1.2 Homotopie 8
1.2.1 Die fundamentale Gruppe 8
1.2.2 Eine Variante der Konstruktion 9
1.2.3 Höhere Homotopie-Gruppen 9
1.2.4 Relative Homotopie 9
1.2.5 Eigenschaften der Homotopie-Gruppe 10
1.2.6 Vergleich mit der Homologie 11

1.3 K-Theorie 12
1.3.1 Vektorraumbündel 12
1.3.2 Die Konstruktion von Grothendieck 15
1.3.3 Eigenschaften 15
1.3.4 Anwendungen 16
1.3.5 Vergleich mit Homologie und Homotopie 16

1.4 Simpliziale Mengen 17
1.4.1 Simpliziale Homologie 17
1.4.2 Vergleich mit der singulären Homologie 17
1.4.3 Kombinatorische Simplizialkomplexe 18
1.4.4 Geometrische Realisierung 18
1.4.5 Die Topologie der Realisierung 19
1.4.6 Die Realisierung als Faktoraum 19
1.4.7 Simplizialkomplexe als Funktoren 19
1.4.8 Begriff der simplizialen Menge 21
1.4.9 Geometrische Realisierung einer simplizialen Menge 22
1.4.10 Beispiel: der Nerv einer Überdeckung 23
1.4.11 Beispiel: Simpliziale Mengen von singulären Simplexen 23
1.4.12 Beispiel: die simpliziale Menge d[p] 24
1.4.13 Beispiel: der klassifizierenede Raum einer Gruppe 24
1.4.14 Nicht-entartete Simplexe 25
1.4.15 Homologie einer simplizialen Menge 25
1.4.16 Kohomologie einer simplizialen Menge 26
1.4.17 Lokale Koeffizienten 26
1.4.18 Homologie und Kohomologie mit lokalen Koeffizienten 29
4.15 Literatur zur Theorie der simplizialen Mengen 30

2. DIE ALLGEMEINE THEORIE 5 30

2.1 Der klassifizierende Raum einer kleinen Kategorie 5 30
2.1.1 Definition und Beispiele 30
2.1.2 Überlagerungen des klassifizierenden Raums BC und die fundamentale Gruppe 32
2.1.3 Die Homologie von BC 35
2.1.4 Eigenschaften des klassifizierenden Raumes 41
2.1.5 Hinreichende Kriterien für Homotopie-Äquivalenzen 49
2.1.6 Die exakte Homotopie-Sequenz 59

2.2. Die K-Gruppen einer exakten Kategorie 15 71
2.2.1 Exakte Kategorien 15 71
2.2.2 Die Kategorie QM 16 74
2.2.3 Die fundamentale Gruppe von QM: Theorem 1 18 80
2.2.4 Höhere K-Gruppen 19 82
Vereinbarung 19 83
2.2.5 Elementare Eigenschaften von K-Gruppen 19 83
2.2.6 Beispiel: endlich erzeugte projektive Moduln 20 85
2.2.7 Bemerkungen 89

2.3 Charakteristische exakte Sequenzen und Filtrationen 21 **89**

2.4 Reduktion durch Auflösungen 24 **89**

2.5 Abstieg und Lokatisierung in abelschen Kategorien 28 **89**

3. ANWENDUNGEN **89**

2.6. Filtrierte Ringe und die Homotopie-Eigenschaft regulärer Ringe **3389**

2.7 K'-Theorie für Schemata 40 **89**

2.8 Projektive Faserbündel 54 **89**

ANHÄNGE **89**

KATEGORIEN **89**

Definitionen **90**
Begriff der Kategorie 90
Beispiele: Ens, Top, Ab, R-Mod, Mod-R 91
Begriff des Funktors 91
Begriff der natürlichen Transformation 91

Spezielle Morphismen **91**
Beispiel eines nicht surjektiven Epimorphismus 91
Beispiel eines nicht injektiven Monomorphismus 91
Beispiel eines bijektiven Morphismus, der kein Isomorphismus ist 92

Darstellbare Funktoren **92**

Adjungierte Funktoren **93**
Definition 93
Eigenschaften adjungierter Funktoren 93
Adjungierte Funktoren von Zusammensetzungen 94

Äquivalenzen von Kategorien **95**

Additive Kategorien **95**
Definition 95
Vergleich der Axiome 97
Kriterium für direkte Summen 99
Kriterium für direkte Produkte 100
Die Matrix einer Zusammensetzung von Morphismen 101
Beweis der Äquivalenz der beiden Axiomen-Systeme 101
Eigenschaften von Morphismen 102
Satz von Krull-Schmidt 103

Abelsche Kategorien **104**

Exakte Kategorien **104**
Definition 104
Beispiel 105
Eigenschaften exakter Kategorien 108

TOPOLOGISCHE RÄUME 115

Überlagerungen 115
Unverzweigte Überlagerungen 115
Unverzweigte Überlagerungen und $\pi_1(Y, y)$-Mengen 115
Universelle Überlagerungen 116

Faserbündel 117
Das Serre-Faserbündel zu einer stetigen Abbildung 117

Quasi-Fibrationen 122
Definiiton 122
Beispiel 1: Serre-Faser-Bündel 122
Beispiel 2: zwei verbundene Quadrate 122
Die exakte Sequenz zu einer Quasi-Faserung 122
Ein Kriterium für Quasi-Faserung 123
Ausgezeichnete Mengen 123
Kriterium für Quasifaserungen 123
Folgerung 1 124
Folgerung 2 124

SIMPLIZIALE MENGEN 124

Definition 124

Realisierung, Direkte Produkte 125
Nicht-entartete Simplexe 125
Jedes Simplex kommt von genau einem nicht-entarteten 126
Erhaltung des nicht-entarteten Repräsentanten 127
|X| als Vereinigung der nicht-entarteten offenen Simplexe 127
Eine Alternative für die Wahl der Standard-Simplexe 132
Satz von Eilenberg-Zilber 133

Beispiele 136
Beispiel: d[n] 136
Beispiel: $\partial d[n] = \dot{\Delta}[n]$ 136
Beispiel: Das n-Skelett einer simplizialen Menge 136

Homologie und Kohomologie 140
Moore-Komplex und normalisierter Komplex 140
Nicht-entartete Simplexe 141
Entartete Simplexe D(A) 141
Vergleich von N(A) mit dem Faktor-Komplex A/D(A) 142
Vergleich der Homologie von N(A) und A 144

ABGELEITETE FUNKTOREN 146

Literatur 146

Injektive und projektive Objekte 146

Halbexakte Funktoren 147

Rechtsabgeleitete Funktoren 147

Existenz abgeleiteter Funktoren 148

Berechnung durch injektive bzw. projektive Auflösungen 148

Beispiel: Ext 148

Beispiel: Tor 148

Beispiel: Gruppen-Homologie 149

Beispiel: Gruppen-Kohomologie 149

∂-Funktoren 149

SPEKTRALSEQUENZEN 150

Literatur 150

Einführung 150

Definition 151

Konvergenz von Spektralsequenzen 152

Die Limes-Terme einer Spektralsequenz 152

Regularität, schwache Konvergenz, Approximation, Konvergenz 153

Konstruktion von Spektralsequenzen 154

Die beiden Spektralsequenzen zu einem Doppelkomplex 155

Beispiel. Hyperkohomologie-Spektralsequenzen 156

Beispiel. Die Spektralsequenz einer Funktorkomposition 156

Beispiel: Die Künneth-Spektralsequenz 157

Beispiel. Die Lerray-Serre-Spektral-Sequenz 158

LITERATUR 159

INDEX 161

INHALT 165