

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederohloung

2. Kartesisches Produkt und Relationen

3. Eigenschaften von Relationen

4. Operationen auf Relationen

5. Äquivalenzrelationen

Bis jetzt:

- Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Beweise (auch Induktionsbeweise), Mengenlehre)
- Alle anderen mathematischen Strukturen können mit Hilfe von Mengen definiert werden.
  - Beispiel: Geordnetes Paar. Gegeben sind zwei Objekte A und B. Wir können das geordnete Paar (A, B) betrachten.
  - Schlüsseleigenschaft: $(A, B) = (C, D)$, genau dann, wenn $A = C$ und $B = D$.

1. Wiederohloung

2. Kartesisches Produkt und Relationen

3. Eigenschaften von Relationen

4. Operationen auf Relationen

5. Äquivalenzrelationen

- Seien M und N zwei Mengen. Dann definieren wir das Kartesiche Produkt $M \times N$ wie folgt:

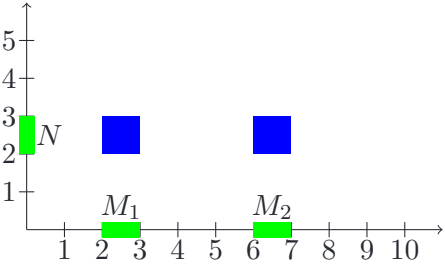
$$M \times N := \big\{(m, n) \colon m \in M,\, n \in N\big\}$$

- Wir betonen dass wenn $M \neq N$, und $M, N \neq \emptyset$, dann auch $M \times N \neq N \times M$.
- Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 3\}$, dann

$$M \times N = \{(1,1),\, (1,3),\, (2,1),\, (2,3),\, (3,1),\, (3,3)\}.$$

- Beispiel: $M_1 = [2,3]$, $M_2 = [6,7]$, $N = [2,3]$.

$(M_1 \cup M_2) \times N =$



- Seien M und N zwei Mengen (möglicherweise mit $M = N$). Eine *Relation* R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.
- Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \, R \, n$ oder $m \sim_R n$ oder $m \sim n$ wenn R im gewissen Kontext klar ist. Wenn $(m, n) \notin R$, schreiben wir $m \not R \, n$ oder $m \not\sim_R n$ oder $m \not\sim n$.

- Die leere Relation $\emptyset \subseteq M \times N$ und $M \times N$ selbst sind Relationen von M nach N.
- Sei B die Menge der Bundesbürger. Die Menge

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \colon p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

ist eine Relation von B nach $\mathbb{N}$.

- Die Menge $\{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon n \leq n'\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$.
- Die Teilmengerelation $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$.
- Die Freund-Relation auf der Menge F der Facebook-Nutzer

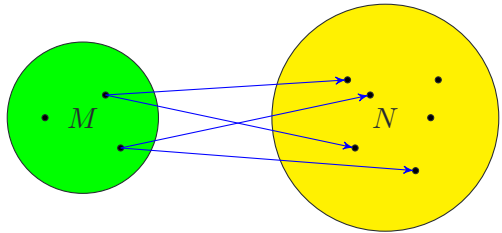
$$\big\{(x, y) \in F \times F \colon x \text{ ist Facebook-Freund von } y\big\}$$

ist eine Relation.

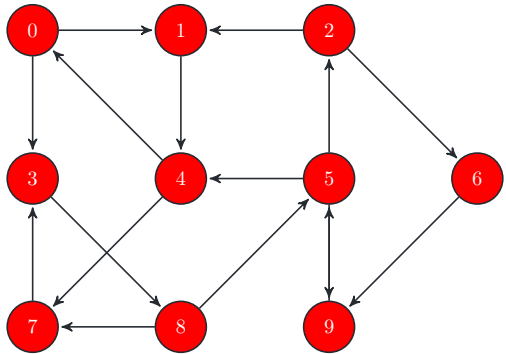
- Für jede Menge M ist die *Identität* $\mathrm{id}_M = \{(m, m) \colon m \in M\}$ eine Relation auf M.

Gewöhnlich schreibt man $x = y$ statt $x \sim_{\mathrm{id}_M} y$.

- Relationen werden häufig als Graphen dargestellt. Die Knoten sind die Elemente der Mengen, und gerichtete Pfeile repräsentieren die Relation.
- Beispiel: eine Relation von M nach N



- Beispiel: eine Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



1. Wiederohloung

2. Kartesisches Produkt und Relationen

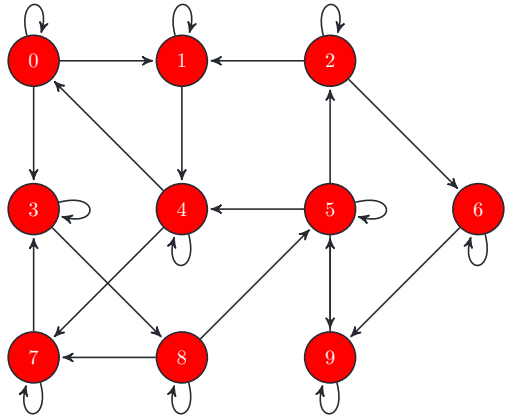
3. Eigenschaften von Relationen

4. Operationen auf Relationen

5. Äquivalenzrelationen

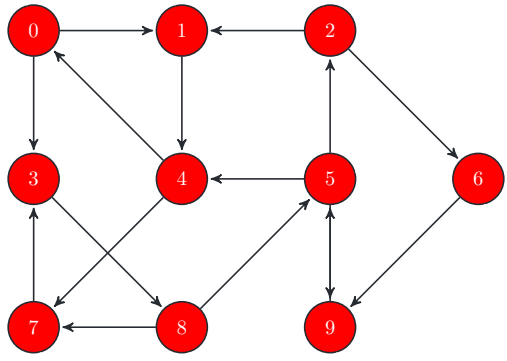
Sei $R \subseteq M \times M$ ein Relation auf M. R heißt

- *reflexiv*, falls jedes Element x von M steht in Relation zu sich selbst. $\forall_{x \in M}\ (x, x) \in R$,



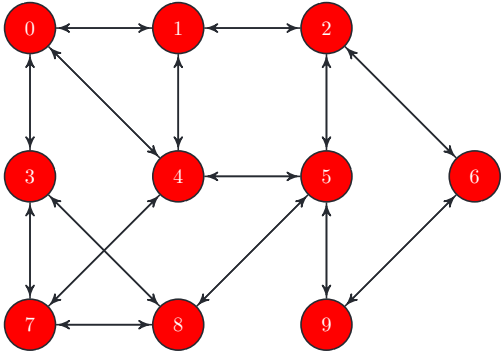
  - Reflexivität: Alle Elemente haben Schleifen.
  - Beispiele: $=$ auf jeder Menge ist reflexiv, $<$ auf $\mathbb{R}$ ist nicht reflexiv, $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ ist reflexiv

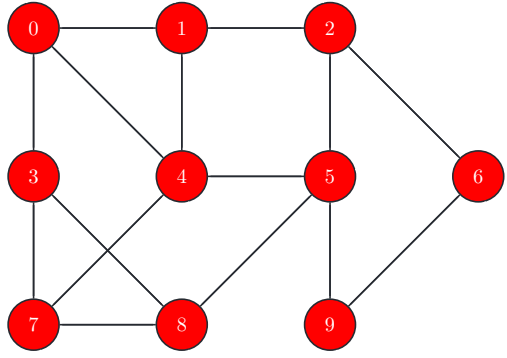
- *irreflexiv*, falls kein Element x von M steht in Relation zu sich selbst. $\forall_{x \in M}(x, x) \notin R$,



- Irreflexivität: Kein Element hat eine Schleife.
- z.B. $<$ auf $\mathbb{R}$ is irreflexiv, $\subsetneq$ auf $\mathcal{P}(M)$ ist irreflexiv

- *symmetrisch*, falls wenn x in Relation zu y steht, dann steht auch y in Relation zu x. $\forall_{x,y \in M}\big((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R\big)$,

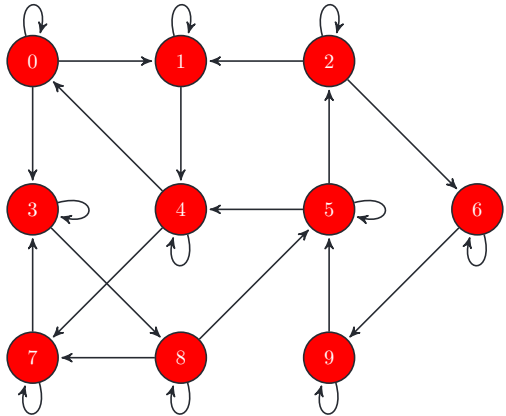




- Symmetrie: Jeder Pfeil ist beidseitig. Z.B. $=$ auf jeder Menge M is symmetrisch, Facebook-freundschaft ist symmetrisch.

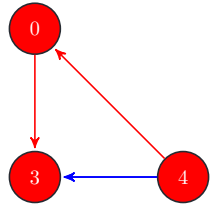
- *antisymmetrisch*, falls wenn $x \sim y$ und $y \sim x$ dann $x = y$.

$\forall_{x,y \in M} \left(((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow x = y \right)$



- Antisymmetrie: Kein Pfeil ist beidseitig, mit Ausnahme von Schleifen. Z.B. $<$, $\leqslant$ und $\subseteq$ sind antisymmetrisch.

- *transitiv*, falls $x \sim y$ und $y \sim z$ impliziert $x \sim z$.
$\forall_{x,y,z \in M} (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.



- Transitivität: Wenn es einen Weg der Länge zwei gibt, dann muss auch der direkte Pfeil vorhanden sein. Z.B $.<$ und $\leq$ sind transitiv.

- *total*, falls für alle Elemente $x, y \in M$ steht x in Relation zu y oder y in Relation zu x, $\forall_{x,y \in M}(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
- Z.B. $\leqslant$ ist total, $<$ is nicht total.

1. Wiederohloung

2. Kartesisches Produkt und Relationen

3. Eigenschaften von Relationen

4. Operationen auf Relationen

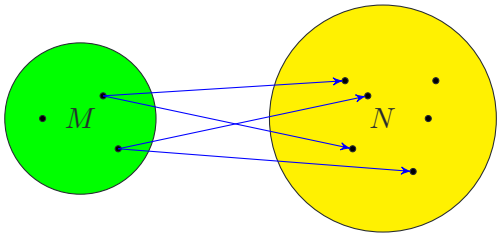
5. Äquivalenzrelationen

- Sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation. Die *inverse Relation* R^{-1} von R:

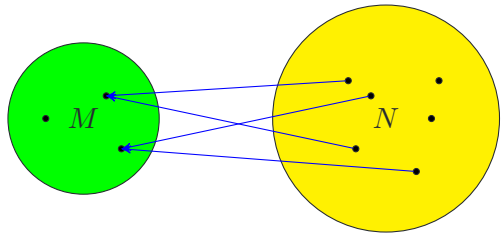
$$R^{-1} := \{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}.$$

- Insbesondere, falls R eine Relation auf M ist, so ist auch R^{-1} eine Relation auf M.
- Die Inversion bewirkt also einen Tausch der Komponenten und eine Umkehr der Pfeile.

R - Relation von M nach N



R^{-1} - Relation von N nach M



- Beispiel: Sei $R := \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$ eine Relation auf $\{1,2,3,4\}$. Dann ist

$$R^{-1} = \{(1,1),\ (3,1),\ (2,2),\ (4,2),\ (2,3)\}.$$

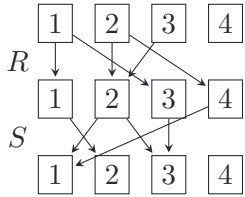
- Beispiel: Die inverse Relation von $<$ auf $\mathbb{R}$ ist $>$.

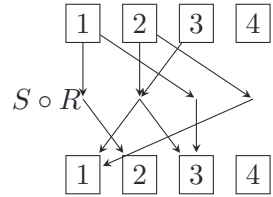
- Seien $R \subseteq M \times N$ und $S \subseteq N \times P$ Relationen. Die *Komposition* $S \circ R$ ist die Relation von M nach P mit

$$S \circ R := \{(m,p) \in M \times P \colon \exists n \in N \; ((m,n) \in R \text{ und } (n,p) \in S)\}\,.$$

- Man liest $S \circ R$ von rechts nach links: Zuerst geht man mit R von M nach N, dann mit S von N nach P.

- Beispiel.





- $S \circ R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),\}$.

- Übung: Die Komposition von Relationen ist assoziativ: $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

1. Wiederohloung

2. Kartesisches Produkt und Relationen

3. Eigenschaften von Relationen

4. Operationen auf Relationen

5. Äquivalenzrelationen

- Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die eine Menge in Klassen von “gleichartigen” Elementen zerlegt.
  - Wir könnten uns nur für die Parität einer gegebenen natürlichen Zahl interessieren. In diesem Fall gibt es natürliche Zahlen nur in zwei Arten: gerade und ungerade.
  - Wir könnten uns nur für die Anzahl der verschiedenen Primteiler einer natürlichen Zahl interessieren. Dann wären 30 und 105 voneinander ununterscheidbar.

Definition

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Oft benutzen wir das Zeichen $\equiv$ für Äquivalenzrelationen.

- Beispiel: Kongruenz modulo n. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Wir haben schon früher eine Relation auf $\mathbb{Z}$ definiert: $a \equiv b$ gdw. $n \mid b - a$. ▶ Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann $n \mid a - a$, also $a \equiv a$.

  ▶ Symmetrie: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b$, also $n \mid b - a$. Deswegen auch $n \mid a - b$, wobei $b \equiv a$.

  ▶ Transitivität: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b$ und $b \equiv c$. Dann $n \mid b - a$ und $n \mid c - b$, wobei $n \mid (b - a) + (c - b) = c - a$, was bedeutet dass $a \equiv c$.

- Für $m \in M$, die *Äquivalenzklasse* von m ist die Menge:

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \colon m \equiv x\}$$

- Z.B. falls $\equiv$ ist die Kongruenz modulo 3 dann bekommen wir drei Äquivalenzklassen: $[0] = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 \mid x\}$, $[1] = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv 1 \mod 3\}$, $[2] = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv 2 \mod 3\}$.

Lemma. Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, und seien $x, y \in M$. Dann

$$x \equiv y \iff [x] = [y].$$

Beweis.

- ($\Rightarrow$) Sei $x \equiv y$. Zu zeigen ist $[x] = [y]$. Wir zeigen zwei Inklusionen.
  - ($\subseteq$) Sei $z \in [x]$. Dann gilt $x \equiv z$. Mit Symmetrie folgt aus $x \equiv z$ auch $z \equiv x$ und mit Transitivität gilt damit $z \equiv y$. Folglich $z \in [y]$.
  - ($\supseteq$) Sei $z \in [y]$. Dann gilt $y \equiv z$. Mit Transitivität gilt $x \equiv z$, weswegen $z \in [x]$.
- ($\Leftarrow$) Sei $[x] = [y]$. Aus der Reflexivität folgt $y \in [y] = [x]$, also $x \equiv y$. □

- Wir möchten jetzt zeigen, dass die Äquivalenzklassen einer beliebigen Äquivalenzrelation auf M sind nicht leere disjunkte Mengen, deren Vereinigung die ganze Menge M ist. D.h. die Äquivalenzklassen bilden eine *Zerlegung von* M: eine Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ mit den Eigenschaften
  - $\emptyset \notin \mathcal{N}$,
  - $M = \bigcup \mathcal{N}$,
  - $N \cap N' = \emptyset$ für alle $N, N' \in \mathcal{N}$ mit $N \neq N'$.

Satz. Sei M eine nicht leere Menge und sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Äquivalenzklassen von $\equiv$. Dann ist $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von M.

Beweis. Also $\mathcal{K} = \{[m] \colon m \in M\}$.

- Zu zeigen: Die Menge $\mathcal{K}$ erfüllt die Eigenschaften einer Zerlegung, d.h. die Äquivalenzklassen sind nicht leere disjunkte Mengen, und die Vereinigung von allen Äquivalenzklassen ist gleich M.

- Mit der Reflexivität von $\equiv$ gilt $m \in [m]$ und damit $[m] \neq \emptyset$.

- Seien $[a], [b] \in \mathcal{K}$ mit $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Dann existiert $c \in [a] \cap [b]$, also $a \equiv c$ and $b \equiv c$. Mit dem Lemma ($x \equiv y \iff [x] = [y]$) es folgt: $[a] = [c] = [b]$. Das bedeutet, dass jede zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt.

- Die Inklusion $\bigcup \mathcal{K} \subseteq M$ ist klar . Umgekehrt gilt für jedes $m \in M$ auch $m \in [m] \subseteq \bigcup \mathcal{K}$, womit $M \subseteq \bigcup \mathcal{K}$.

- Umgekehrt, aus einer Zerlegung $\mathcal{K}$ einer Menge M, können wir eine Äuivalenzrelation $\equiv$ definieren, deren Äquivalenzklassen die Elemente von $\mathcal{K}$ sind.
  - Für $a, b \in M$ definieren wir $a \equiv b$ gdw $\exists_{A \in \mathcal{K}}$ so dass $a, b \in A$.
  - Übung: $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.
- Die Äquivalenzklassen modulo n in $\mathbb{Z}$ nennen wir auch “Kongruenzklassen modulo n”. Die Menge aller Kongruenzklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}/n$.
- Algemein: die Menge aller Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation $\equiv$ auf einer Mengen M wird häufig durch $M/\equiv$ bezeichnet.