

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Vorläufige Kurs-Website:

https://www.math.uni-leipzig.de/~grabowski/la1-2026-27/moodle.html

1. Wiederholung - Mengenlehre

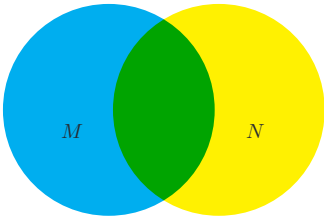
2. Prinzip der vollständigen Induktion

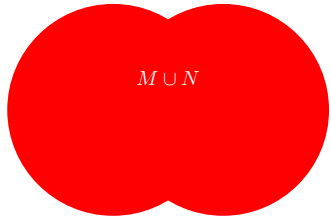
3. Was jetzt? Alles aus Mengen bauen.

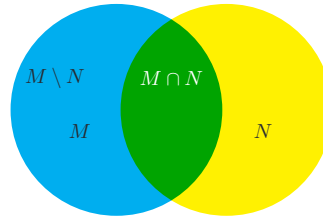
- Der Begriff einer Menge ist ein Grundbegriff, den man in der Mathematik nicht anhand einfacherer Objekte definiert.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- Leere Menge: $\emptyset$ enthält keine Elemente.
- Beispiel: $\{\emptyset\}$ ist eine Menge mit genau einem Element. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$
- ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$
- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

- Zwei Mengen M und N sind *gleich*, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
  - Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Teilmenge $M \subseteq N$
- $M = N \iff M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.
- Wir können die Objekte, für die ein gegebenes Prädikat $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
  - $M := \{x \colon P(x)\}$, (oder $\{x \mid P(x)\}$).
  - oder z.B. $\{x \in \mathbb{Z} \colon P(x)\}$. $\{n \in \mathbb{N} \colon 2 \mid n\}$.

- Operationen auf Mengen: Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$, Komplement M^c.







- Wenn $M \cap N = \emptyset$, so nennen wir M und N *disjunkt*.

- Für die Mengenoperationen gelten ähnliche Eigenschaften als für die logischen Junktoren, z.B. $\cap$ und $\cup$ sind assoziativ, also wir können $A \cap B \cap C$ und $A \cup B \cup C$ schreiben,
- De-Morgan-Gesetze: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- Für endliche Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente, auch *Kardinalität* genannt.
- Für eine Menge M ist die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$$

- $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

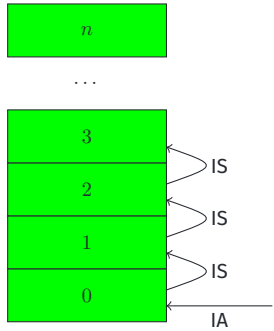
1. Wiederholung - Mengenlehre

2. Prinzip der vollständigen Induktion

3. Was jetzt? Alles aus Mengen bauen.

Prinzip der vollständigen Induktion Sei $F(x)$ eine Prädikat mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- $F(0)$ und
- $F(n) \Rightarrow F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.



- Ein Induktionsbeweis funktioniert wie folgt.
  - Erst zeigen wir die Behauptung für den Fall $n = 0$ (Induktionsanfang).
  - Dann folgt Induktionsschritt:
    - Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl n und setzen voraus, dass die Behauptung für n bereits gezeigt ist (Induktionshypothese).
    - Dann beweisen wir die Induktionsbehauptung: die Behauptung für den Nachfolger $n + 1$. Im Beweis können wir die Induktionshypothese nutzen.

- In diesem Modul, im jeden Induktionsbeweis müssen Sie klar gekennzeichnen, wass sind die Induktionsanfang, Induktionshypothese, Induktionsbehauptung, und wo die Induktionshypothese im Beweis der Induktsionsbehaputung benutzt wird.

Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. • Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n.

- Wir betrachten das Prädikat

$$F(n): \quad \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- *Induktionsanfang.* Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 * 1}{2}.$$

Also gilt die Behauptung für $n = 0$.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die folgende *Induktionshypothese* gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Wir möchten jetzt die folgende *Induktionsbehauptung* zeigen:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

- *Beweis der Induktionsbehauptung.* Wir rechnen

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{\text{IH}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

- Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz. Wenn M eine endliche Menge ist, dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis. Vollständige Induktion über n. Wir möchten beweissen dass für jede Menge M mit $|M| = n$ es gilt dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

- Induktionsanfang. Sei Menge M beliebig, mit $|M| = 0$. Die einzige solche Menge ist $M = \emptyset$. Da $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, es gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen jetzt an, dass die folgende Induktionshypothese gilt: für jede Menge M mit $|M| = n$ es gilt dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

- Wir möchten jetzt die folgende Induktionsbehauptung zeigen. Sei M eine Menge mit $|M| = n + 1$. Dann $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$.

- Beweis der Induktionsbehauptung: wir wählen $x \in M$ beliebig und definieren $N := M \setminus \{x\}$.

- jetzt unterteilen wir alle Teilmengen von M in (a) diejenigen die x nicht enthalten, und (b) diejenigen die x enthalten.

- Z.B. wenn $M = \{1, 2, 3\}$ und $x = 3$, dann $N = \{1, 2\}$, und
  - (a) die Teilmengen, die x nicht enthalten, sind $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$
  - (b) die Teilemengen, die x enthalten, sind $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.
- Im Allgemeinen haben wir $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(N) \cup \big\{S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(N)\big\}$.
- Die Mengen $\mathcal{P}(N)$ und $\big\{S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(N)\big\}$ sind disjunkt, also

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(N)| + |\mathcal{P}(N)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(N)| \overset{\text{IH}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

- Der Beginn der Induktion muss nicht bei $n = 0$ liegen. Z.B. beweisen wir jetzt: für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 16$ gilt $n^3 < 2^n$.

Beweis. • Im Beweis werden wir das folgende Lemma benutzen.

Lemma. Für alle $n \geq 16$ gilt $(\frac{n+1}{n})^3 < 2$.

Beweis. $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ist eine fallende Funktion, weswegen auch $(\frac{n+1}{n})^3$ eine fallende Funktion ist. Deswegen müssen wir nur überprüfen dass $\frac{17^3}{16^3} < 2$. Aber $\frac{17^3}{16^3} < \frac{18^3}{15^3} = \frac{6^3}{5^3} = \frac{216}{125} < 2$. □

- **Induktionsanfang**: Für $n = 16$ gilt, dass $16^3 = 2^{12} < 2^{16}$.
- Sei $n \geqslant 16$. Wir nehmen jetzt an dass die folgende Induktionshypothese gilt: $n^3 < 2^n$.

- Wir möchten jetzt beweisen dass die folgende Induktionsbehauptung gilt: $(n+1)^3 < 2^{n+1}$.

- Beweis der Induktionsbehauptung: wir schreiben $(n+1)^3 = n^3 \cdot (\frac{n+1}{n})^3$. Mit IH deduzieren wir dass $(n+1)^3 < 2^n \cdot (\frac{n+1}{n})^3$. Da $\frac{n+1}{n}^3 < 2$ wenn $n \geq 16$ (Lemma oben), deduzieren wir dass $(n+1)^3 < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

1. Wiederholung - Mengenlehre

2. Prinzip der vollständigen Induktion

3. Was jetzt? Alles aus Mengen bauen.

• Alle mathematischen Strukturen können mit Hilfe von Mengen definiert werden. Doch wenn wir über Strukturen wie Zahlen, Graphen usw. nachdenken, gehen wir fast nie bis zu den Mengen zurück.

• Dies ist sehr analog zu der Situation mit modernen Computern: Einerseits stimmt es, dass jeder Computer in seinem Kern $0/1$-Variablen mit den Grundoperationen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ manipuliert. Wir brauchen uns damit aber nicht zu befassen wenn wir ein Dokument bearbeiten, im Internet surfen oder Musik auf dem Computer hören.

• Wie man modern Mathematik "baut": wir anfangen nur mit acht "Axiome" die uns die Eigenschaften von Mengen beschreiben. Z.B. wie können wir neue Mengen bauen, wann sind zwei Mengen gleich, usw. Diese acht Axiome heißen die "Zermelo-Frankel-Mengenlehre".

  ▶ Z.B. das Extensionalitätsaxiom sagt uns wann sind zwei MEngen gleich: $A = B \iff (\forall C\ C \in A \iff C \in B)$.

• Alle andere mathematische Objekte werden aus Mengen definiert. Z.B. die natürliche Zahlen werden so definiert $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, $3 := \{0, 1, 2\}$, usw.

- Neue Struktur: geordnetes Paar. Gegeben sind zwei Objekte A und B. Wir können das geordnete Paar (A, B) betrachten.
- Unterschiede von (A, B) im Vergleich zur Menge $\{A, B\}$:
  - Wenn $A \neq B$, dann spielt die Reihenfolge eine Rolle, d.h. $(A, B) \neq (B, A)$,
- Wenn $A = B$, dann $\{A, B\} = \{A\}$. Nichts ähnliches gescheht für das geordnete Paar. Z.B. können wir die geordnete Paare $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, usw. betrachten.
- Mit Mengen als Bausteinen: "Kuratowskis geordnetes Paar". Bei gegebenen Objekten A und B definieren wir $(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}$.
  - Schlüsseleigenschaft: $(A, B) = (C, D)$, genau dann, wenn $A = C$ und $B = D$.
  - Es gibt auch andere mögliche mengentheoretische Definitionen. Aber das ist uns nicht wichtig. Die Analogie zur Informatik ist: Wenn wir einen Taschenrechner haben, ist es uns ziemlich egal, wir er innen funktionert, solange er uns den Zugriff auf Multiplikation und Addition ermöglicht.