

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

- Prädikatenlogik: die neuen Elemente im Vergleich mit Aussagenlogik:
  - *Variablen* und *Prädikaten*, die wir als "Aussagenschablonen" betrachten.
  - *Quantoren*: Allquantor und Existenzquantor.
- Z.B:
  - $\neg\Big(\exists_{x\in\mathbb{Q}}\, x^2 = 2\Big)$.
  - $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- Modulare Arithmetik: Wir sagen dass $a, b \in \mathbb{Z}$ *kongruent modulo* n sind, geschrieben $a \equiv b \mod n$, wenn a und b dengleichen Rest haben wenn wir sie durch n teilen.
- Kongruenzen können wir addieren und multiplizieren, z.B. modulo 5:

$$7^5 + 13^{20} \equiv 2^5 + 3^{20} \equiv 2^5 + (-2)^{20} \equiv 2 \cdot (-1)^2 + (-1)^{10} \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 3.$$

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

Satz. Es gibt keine größte Primzahl.

Beweis. • Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es die größte Primzahl p gibt.

Dann lassen sich alle Primzahlen wie folgt auflisten $2 = p_1, 3 = p_2, \ldots, p = p_n$.

• Betrachten wir die Zahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$.

• Es gibt eine Primzahl, die N teilt. Dies ist eine der oben aufgeführten Primzahlen, nennen wir sie p_k.

• Aber N kann als $ap_k + 1$ geschrieben werden, also p_k teilt N nicht. Dieser Widerspruch zeigt unsere These. □

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle natürlichen Zahlen $n > N$ gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

- Mit Quantoren: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ (“Ceiling von $\frac{1}{\varepsilon}$”). Sei nun $n > N$. Dann gilt $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$. □

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

- Der Begriff einer Menge ist ein Grundbegriff, den man in der Mathematik nicht anhand einfacherer Objekte definiert.

- Informell (nach Georg Cantor 1895): Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die zusammengefassten Objekte heißen *Elemente* von M.

Beispiele und Notation.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen jeweils die Mengen aller natürlichen Zahlen, aller ganzen Zahlen, aller rationalen Zahlen und aller reellen Zahlen.
- Vollständige oder unvollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$ bzw. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ Das Muster muss klar erkennbar sein.
- Leere Menge: $\emptyset$ enthält keine Elemente.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\{\emptyset\}$ ist eine Menge mit genau einem Element. Dieses Element is die leere Menge.

- Für eine Menge M ist jedes Objekt x entweder ein Element von M (kurz $x \in M$) oder nicht (kurz $x \notin M$).

- Insbesondere kann ein Element nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$

- Die Elemente einer Menge können unterschiedlichen Typs und sogar selbst wieder Mengen sein. $\{\mathbb{R}, 2, \emptyset\}$

- Die Elemente einer Menge haben keine Anordnung; ihre Reihenfolge ist irrelevant. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

- Außerdem gilt: Jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente, auch wenn Sie genau ein Element enthält. $\{3\} \neq 3$.

- Wir verkürzen "$x \in M$ und $y \in M$" einfach zu "$x, y \in M$". Wenn wir $x, y, z \in \{1,\ 2,\ 3\}$ schreiben, durchaus $x = y = z$ gelten kann.

Beispiel. Sei $M := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

- $\emptyset \in M$
- $\{\emptyset\} \in M$
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$ falsch

- Zwei Mengen M und N sind *gleich*, kurz $M = N$, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
- Insbesondere gibt es genau eine Menge die enthält keine Elemente, nämlich $\emptyset$.
- Eine Menge M ist eine *Teilmenge* der Menge N, kurz $M \subseteq N$ oder $M \subset N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist.

$$M \subseteq N \iff \forall m\big((m \in M) \Rightarrow (m \in N)\big).$$

$$M = N \iff \forall m\big((m \in M) \Rightarrow (m \in N)\big) \wedge \forall n\big((n \in N) \Rightarrow (n \in M)\big),$$

- auch geschrieben: $N \supseteq M$ und N ist eine Obermenge von M.
- echte Teilmenge $M \subsetneq N$ falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Alle Inklusionen sind hier echt.

Satz. Für alle Mengen M und N gilt: $M = N \iff M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

Beweis. Die Aussage $M = N$ ist äquivalent zu

$$\forall x\big(x \in M \iff x \in N\big).$$

Das ist equivalent zu

$$\forall x\big((x \in M) \Rightarrow (x \in N)\big) \wedge \forall x\big((x \in N) \Rightarrow (x \in M)\big).$$

Das ist äquivalent zu $(M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M)$ □

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

- Die einstelligen Prädikaten sind die Prädikaten mit einer Variable/
- z.B. “x ist eine ganze Zahl”, “$x \in \mathbb{Z}$”, “$2 \mid x$”, “$\exists y\ y \mid x$”.
- Wir können die Objekte, für die $P(x)$ wahr ist, in eine Menge zusammenfassen.
  - $M := \{x \colon P(x)\}$, (oder $\{x \mid P(x)\}$).
- Wenn es kein Universum im gegebenem Kontext gibt, dann schreiben wir z.B. $\{x \in \mathbb{Z} \colon P(x)\}$.
- Beispiel: $\{n \in \mathbb{N} \colon 2 \mid n\} = \{n \in \mathbb{N} \colon \exists k \in \mathbb{N}\ n = 2k\}$.
- Mengen und einstellige Prädikaten sind, informel gesagt, essentiel “die gleiche Sache”.
  - Falls wir ein einstelliges Prädikat P haben, haben wir eine Menge $M := \{x \colon P(x)\}$,
  - Umgekehrt, falls wir eine Menge M haben, haben wir ein Prädikat $P(x) := “x \in M”$.

- Manchmal verwenden wir informell andere Methoden zur Definition von Mengen, die der obigen Methode mit Prädikaten ähneln, aber bei näherer Betrachtung anders sind, z.B.

$$\{a + b \in \mathbb{R} \colon a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}\}.$$

  - Beispiel-Elemente: $1 + \sqrt{2}, \frac{2}{3} + \sqrt{3}$.

- Wenn wir es ganz formal schreiben wollen, würden wir schreiben

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \exists a \in \mathbb{Q}, b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \text{ so dass } x = a + b\}.$$

- Bei der Mengennotation bedeutet das Komma immer “und”. Z.B. $\{a \in \mathbb{Z} \colon 3 \mid a,\ 7 \nmid a\}$

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

Seien M und N Mengen.

- Die *Vereinigung* von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M *oder* Element von N sind:

$$M \cup N := \{x \colon x \in M \vee x \in N\}.$$

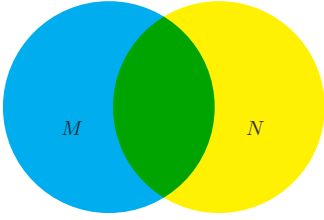
- Der *Schnitt* von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M *und* von N sind:

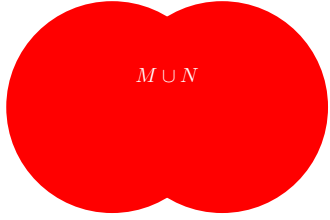
$$M \cap N := \{x \colon x \in M,\, x \in N\} = \{x \in M \colon x \in N\}.$$

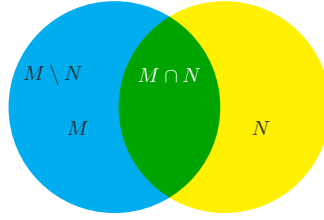
- Die *Differenz* von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M, aber nicht Element von N sind:

$$M \setminus N := \{x \colon x \in M,\, x \notin N\} = \{x \in M \colon x \notin N\}.$$

Venn-Diagramme illustrieren diese Definitionen.



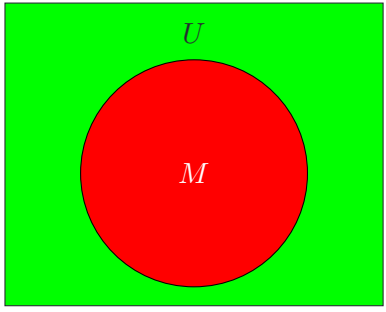


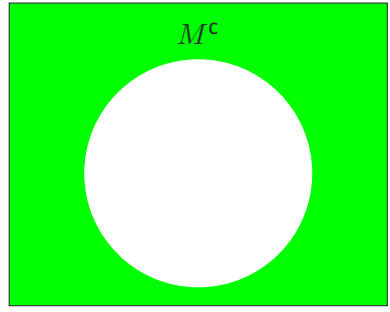


- Wenn $M \cap N = \emptyset$, so nennen wir M und N *disjunkt*.

- Im Kontext von Mengenoperationen haben wir oft eine Grundmenge U, in der alle betrachteten Mengen enthalten sind.
  - Das *Komplement* von $M \subseteq U$ besteht aus den Elementen von U, die nicht Elemente von M sind:

$$M^{\mathsf{c}} := \{u \in U \mid u \notin M\} = U \setminus M.$$


U
M


M^{C}

- Für die Mengenoperationen gelten ähnliche Eigenschaften als für die logischen Junktoren.
- Beispiel - Distributivität: $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$

Beweis. $M \cup (N \cap P) = \{x \colon (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\}$

$$= \{x \colon \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \colon (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\}$$

$$= \{x \colon (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} = (M \cup N) \cap (M \cup P) \quad \square$$

- Mehr Eigenschaften gibt es auf dem Übungsblatt. Insbesondere $\cap$ und $\cup$ sind assoziativ, also wir können $A \cap B \cap C$ und $A \cup B \cup C$ schreiben, und De-Morgan-Gesetze: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

- Die grundlegenden Eigenschaften können ähnlich zu Äquivalenzketten benutzt werden, um andere Eigenschaften zu zeigen.

- Beispiel. Seien M, N und U Mengen, so dass M und N Teilmengen von U sind. Dann gilt

$$M \setminus N = (M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}}.$$

- Wir fangen mit De-Morgan-Gesetz $(M^{\mathsf{c}} \cup N)^{\mathsf{c}} = (M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}}$
- Da $^{\mathsf{c}}$ involutive ist, haben wir $(M^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}} = M \cap N^{\mathsf{c}}$
- $M \cap N^{\mathsf{c}} = \{x \colon (x \in M) \wedge (x \in N^{\mathsf{c}})\} = \{x \colon (x \in M) \wedge (x \notin N)\} = M \setminus N.$ $\square$

- Ein Beweis-Beispiel wo wir direkt mit Elementen arbeiten: “Monotonie von $\subseteq$”. Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gilt

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$$

Beweis. • Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

- Übung: auch gilt: $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$.

• Übung/Beweisprinzip: wir sollen hier zeigen dass drei oder mehr Aussagen äquivalent sind (“Ringschluss”): für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $M \subseteq N$
- (2) $M \cap N = M$
- (3) $M \cup N = N$

Beweis. • Es reicht zu zeigen: (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), und (3) $\Rightarrow$ (1).

• (1) $\Rightarrow$ (2): $M \cap N \subseteq M$ (“Abschwächung”) gilt immer.

Für die andere Inklusion: aus der Idempotenz haben wir $M = M \cap M$. Da $M \subseteq N$, folgt $M \cap M \subseteq M \cap N$ (“Monotonie”). Dies zeigt $M \subseteq M \cap N$, weswegen auch $M \cap N = M$.

• (2) $\Rightarrow$ (3): ...

• (3) $\Rightarrow$ (1): ... □

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

- Wir haben Vereinigung und Schnitt bis jetzt zweistellig definiert.
- Analog zum Summenzeichen $\sum$ verallgemeinern wir die Definition auf beliebig viele Argumente.
- Sei I eine Menge, und sei M_i eine Menge für jedes $i \in I$. Wir definieren

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x\colon \text{es existiert } i \in I, \text{ so dass } x \in M_i\} = \left\{x\colon \exists_{i \in I}\ x \in M_i\right\}$$

und

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x\colon \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\} = \left\{x\colon \forall_{i \in I}\ x \in M_i\right\}$$

- I wird als die “Indexmenge” bezeichnet.

- Für jede Menge M gilt $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$.
- Beispiel: $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n]$, wobei $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\}$.
- Für $I = \{u, u+1, \ldots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ schreiben wir auch
  - $\bigcup_{i=u}^{o} M_i := \bigcup_{i \in I} M_i$
  - $\bigcap_{i=u}^{o} M_i := \bigcap_{i \in I} M_i$
- Falls die Elemente von $\mathcal{F}$ sind Mengen, dann schreiben wir $\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

1. Wiederholung

2. Weitere Beweis-Beispiele

3. Mengenlehre - Grundbegriffe

4. Mengen und einstellige Prädikaten

5. Operationen auf Mengen

6. Verallgemeinerung von Vereinigung und Schnitt

7. Kardinalität von endlichen Mengen, Potenzmenge

- Jede Menge kann entweder *endlich* oder *unendlich* sein.
- Für endliche Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente, auch *Kardinalität* genannt.
- Ist M unendlich, so schreiben wir auch $|M| = \infty$.
- Für alle endlichen Mengen M und N gilt

$$|M \cup N| \leq |M| + |N|.$$

- Wenn M und N disjunkt sind, also $M \cap N = \emptyset$, so haben wir die Gleichheit

$$|M \cup N| = |M| + |N|.$$

- Für eine Menge M ist die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N \colon N \subseteq M\}$$

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge einer endlichen Menge M? (d.h. was ist die Kardinalität von $\mathcal{P}(M)$?)
- Durch systematisches Probieren stellen wir die Hypothese $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.
- Das ist eine wahre Aussage. Der Grund dafür ist, dass um eine Teilmenge S zu definieren, müssen wir für jedes $x \in M$ entscheiden, ob es in S enthalten ist oder nicht.
  - Da es $2^{|M|}$ solche Auswahlmöglichkeiten gibt, ist dies auch die Anzahl der Teilmengen von M.
- Wir werden diese Aussage in der nächsten Vorlesung genau beweisen, und zwar mit der Beweistechnik der “Vollständigen Induktion”.