

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Organisatorisches

2. Aussagenlogik

3. Äquivalente Formeln und Äquivalenzketten

4. Einige arithmetische Grundlagen

- Weitere Moodle-Website: ̈Informations for students in mathematics (Bachelor/Master)"

**https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=59139**

- KI-nutzung: als “Sparring-Partner” bei den Hausaufgaben, Konzepte-Erklärung
  - Minimum (von mir) empfohlen: etwa chatgpt 5.6 sol. Abraten: die freie chatgpt-Version.
  - Wir versuchen mit Rektorat zu diskutieren, wie wir den Studierenden den Zugang zu solcher KI gewährleisten können, aber es wird dauern bis wir dies erreichen.
  - Sebstverständlich: ohne KI kann man auch sehr gut Mathematik lernen.

Ziele dieses Moduls

- Einführung in die Mathematik und genaues mathematisches Denken (erste ca. 5 Wochen)
- Einführung in die Lineare Algebra

1. Organisatorisches

2. Aussagenlogik

3. Äquivalente Formeln und Äquivalenzketten

4. Einige arithmetische Grundlagen

- Zunächst wollen wir versuchen, zu klären, was eine mathematische Aussage ist. Fangen wir mit einem Beispiel aus dem Gesetz an.

StGB § 211 — Mord

- Der Mörder wird mit lebenslanger Freiheitsstrafe bestraft.
- Mörder ist, wer
  - aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,
  - heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder
  - um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,

einen Menschen tötet.

- Beispiel-Aussagen:
  - Anton ist Mörder
  - Anton tötet aus Habgier
  - Anton tötet heimtückisch
  - Anton bekommt lebenslange Freiheitsstrafe
- Aussagenkombinationen
  - Anton tötet heimtückisch oder Anton tötet aus Habgier
  - Teil des Gesetzes:
    - Wenn Anton ist Mörder dann Anton bekommt lebenslange Freiheitsstrafe

StVO I, § 30(3) — Sonn- und Feiertagsfahrverbot (editiert)

An Sonn- und Feiertagen dürfen (...) Lastkraftwagen nicht verkehren. Dies gilt nicht für

- die Beförderung von frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
- die Beförderung von frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen.

- Beispiel-Aussagen:
  - “Es ist Sonntag”
  - “Mein Auto ist ein Lastkraftwagen”,
  - “Mein Auto darf heute nicht verkehren”,
  - “Mein Auto befördert frische Milch”
- Aussagenkombination:
  - “Mein Auto befördert frische Milch” oder “Mein Auto befördert frisches Fleich”.
  - Wenn “Es ist Sonntag” und (“Mein Auto befördert frische Milch” oder “Mein Auto befördert frisches Fleich”) dann nicht wahr das “Mein Auto darf nicht verkehren”.

**Definition (informel)** Aussage = Äußerung die entweder wahr oder falsch ist.

- genau ein Wahrheitswert; obwohl darf unbekannt sein
- 1 = wahr, 0 = falsch
- Beispiele von Aussagen:
  - “LKW L-DS 2022 befördert frische Milch”,
  - “16.11.2022 war ein Feiertag in Sachsen”,
  - “2 ist eine Primzahl”,
  - “2 + 2 = 5”,
  - “Der einzige Planet in der Milchstraße, auf dem es Leben gibt, ist die Erde.”
  - “Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ ist Summe zweier Primzahlen”,
- Keine Aussagen: “Hallo!”, “Wie heißt du?”, “Bitte nehmen Sie Platz”,

- Am meistens verwenden wir die großen Buchstaben $A$, $B$, $C$,... für Aussagen.
  - Z.B. $A$ könnte die Aussage “Der einzige Planet in der Milchstraße mit Leben ist die Erde” und $B$ die Aussage "2 + 2 = 5” sein.
- Junktoren:
  - Negation $\neg F$ gelesen als nicht $F$ oder auch nicht wahr dass $F$
  - Konjunktion $F \wedge G$ gelesen als $F$ und $G$
  - Disjunktion $F \vee G$ gelesen als $F$ oder $G$
  - Gedankenstütze für die Notation: $A \wedge B$ (und = unten offen), $A \vee B$ (oder = oben offen)
  - Implikation $F \Rightarrow G$ oder auch $F \to G$ gelesen als wenn $F$ dann $G$ oder auch $F$ impliziert $G$. Die Aussage $F$ heißt hier die Vorbedingung und $G$ heißt die Folgerung.
  - Äquivalenz $F \iff G$ oder auch $F \leftrightarrow G$ gelesen als $F$ genau dann, wenn $G$ oder auch $F$ ist äquivalent zu $G$

Wenn wir den Wahrheitswert von Grundaussagen kennen, dann können wir auch sagen, was der Wahrheitswert ihrer beliebigen Kombination ist. Wir verwenden die folgenden Regeln.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \iff B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

- Die meisten Verständnisschwierigkeiten entstehen mit der Implikation.
  - $A$ wahr, $B$ wahr: $A \Rightarrow B$ wahr
  - $A$ wahr $B$ falsch: $A \Rightarrow B$ falsch
  - $A$ falsch, $B$ beliebig: $A \Rightarrow B$ wahr.
- **Beispiel**. Nehmen wir an, wir haben eine Aussage “Falls es heute um 8Uhr geregnet hat, dann habe ich einen Regenschirm mit.”
  - $A \Rightarrow B$, $A =$ “Heute um 8Uhr hat es geregnet”, $B =$ “Ich habe einen Regenschirm mit”.
  - Falls es nicht geregnet hat, dann stimmt diese Aussage. Unabhängig davon ob ich einen Regenschirm habe oder nicht.
- **Beispiel**. “Falls ich 200cm groß bin, dann lebe ich auf dem Mars”.
  - Ich bin nicht 200cm groß, also diese Aussage ist wahr.

- **Beispiel.** “Falls ich in Leipzig wohne dann Frankreich und Spanien haben eine gemeinsame Landgrenze.”
  - $A \Rightarrow B$. $A =$ “Ich wohne in Leipzig”, $B =$“Frankreich und Spanien haben eine gemeinsame Landgrenze.”.
  - $A$ und $B$ sind wahr, deswegen $A \Rightarrow B$ ist auch wahr.
  - Ein nachweisbarer Zusammenhang ist nicht erforderlich.
- $A$ wahr, $B$ falsch: $A \Rightarrow B$ falsch.
- **Beispiel.** “Falls ich in Leipzig wohne dann Frankreich und Spanien haben keine gemeinsame Landgrenze.” ist eine falsche Aussage.

**Definition (informel) - Atome & Formeln** Atome = primitive Aussagen wie $A$, $B$, Formeln = Kombinationen von Atomen, z.B. $(A \wedge B) \vee C$.

- Wahrheitswert einer Formel ergibt sich aus den Wahrheitswerten der Atome.
- Die Rangfolge von logischen Operationen: Negationen, dann Konjunktionen (und), dann Disjunktionen (oder), dann Implikation, dann Äquivalenz.
- **Beispiel.** Wir betrachten die Formel $(A \vee B \Rightarrow C) \wedge \neg B$.
  - Falls z.B. $A = 0, B = 1, C = 0$, dann $A \vee B = 1$, $(A \vee B \Rightarrow C) = 0$, $(A \vee B \Rightarrow C) \wedge \neg B = 0$.

Eine Formel ist

- eine Tautologie (oder tautologisch), falls sie unabhängig von der Belegung der Atome wahr ist.

“Tautologien sind immer wahr.”

- unerfüllbar (oder Kontradiktion), falls sie unabhängig von der Belegung der Atome falsch ist.

“Unerfüllbare Formeln sind immer falsch.’

- erfüllbar, falls sie nicht unerfüllbar ist, d. h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel wahr ist,

- widerlegbar, falls sie keine Tautologie ist., d. h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel falsch ist.

- Die einfachste Methode, um zu überprüfen, ob eine gegebene Formel tautologisch (oder unerfüllbar oder erfüllbar oder widerlegbar) ist, ist die Verwendung der so genannten Wahrheitstabelle - tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten. Schritte:
  - Identifikation aller Atome $A_1, \ldots, A_n$
  - Auflistung aller $2^n$ Wahrheitswertbelegungen für $A_1, \ldots, A_n$.

| $A_1$ | $A_2$ | $\ldots$ | $A_{n-1}$ | $A_n$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\ldots$ | 0 | 0 | $\ldots$ |
| 0 | 0 | $\ldots$ | 0 | 1 | $\ldots$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| 1 | 1 | $\ldots$ | 1 | 1 | $\ldots$ |

  - Berechnung der Wahrheitswerte der Teilformeln

- **Beispiel** Die Formel $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$ ist eine Tautologie. (d.H. diese Formel gilt immer, unabhänging davon was $A$ und $B$ sind)

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Organisatorisches

2. Aussagenlogik

3. Äquivalente Formeln und Äquivalenzketten

4. Einige arithmetische Grundlagen

**Definition** Zwei Formeln sind äquivalent genau dann, wenn (gdw) deren Wahrheitswerte für alle Belegungen der Atome übereinstimmen.

- **Beispiel.** Die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent.
  - ► Die Wahrheitstabelle für $A \Rightarrow B$ haben wir schon besprochen. Die Wahrheitstabelle für $\neg A \vee B$:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

  - ► Die zwei Wahrheitstabellen sind gleich, was bedeutet dass die zwei Aussagen äquivalent sind.

- Man nennt die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ die “Elimination von $\Rightarrow$”.
- Wenn wir zwei Formeln haben, $F$ und $G$, und wir möchten kurz schreiben dass sie äquivalent sind, schreiben wir $F \equiv G$.
  - Z.B. $\neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B$ ist eine Tautologie.
- Ähnlich zeigen wir dass die Formeln $(A \wedge B) \wedge C$ und $A \wedge (B \wedge C)$ äquivalent sind. Diese Äquivalenz heißt “Assoziativität von $\wedge$”.
  - Assoziativität erlaubt uns zu schreiben z.B. $A \wedge B \wedge C$. Es ist unerheblich, wo sich die Klammern befinden und welche Operationen (also entweder $A \wedge B$ oder $B \wedge C$) zuerst durchgeführt werden.

- Die Formeln $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ sind nicht äquivalent.

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

- In diesem Modul, das Symbol $:=$ ist ein Zeichen dafür, dass die linke Seite zum ersten Mal in einem gegebenen Kontext definiert wird.
  - Z.B. “Sei $a := 5$”, oder “Wir definieren die Formel $F$ wie folgt: $F := A \vee B$”.
  - Sie müssen dieses Symbol in Lösungen nicht benutzen, z.B. “sei $a = 5$” ist auch akzeptabel.
- Wenn wir eine große Formel $F$ haben und darin eine Unterformel $U$ sehen, können wir $U$ durch eine äquivalente Unterformel $U'$ ersetzen und erhalten so eine neue formel $F'$ die zu $F$ äquivalent ist.
- Dieser “Substitutionsprinzip” eröffnet uns die Möglichkeit die Formeln zu vereinfachen, und zu zeigen dass zwei Formel äquivalent sind, durch Äquivalenzketten.

- **Beispiel.** $F := (A \Rightarrow B) \vee \neg B$ ist eine Tautologie.
  - ▶ Tatsätzlich durch die “Elimination von $\Rightarrow$” ist $F$ mit $(\neg A \vee B) \vee \neg B$ äquivalent. Und durch die “Assoziativität von oder”, $(\neg A \vee B) \vee \neg B$ ist mit $\neg A \vee (B \vee \neg B)$ äquivalent.
  - ▶ $B \vee \neg B$ ist immer wahr (“Ausgeschlossenes Drittes”), weswegen $\neg A \vee (B \vee \neg B) \equiv \neg A \vee 1 \equiv 1$.
- Mehr Äquivalenzen werden auf dem Übungsblatt aufgelistet.

1. Organisatorisches

2. Aussagenlogik

3. Äquivalente Formeln und Äquivalenzketten

4. Einige arithmetische Grundlagen

- Wir werden die Arithmetik häufig z.B. zur Illustrierung von Beweistechniken verwenden, also rekapitulieren wir einige arithmetische Grundlagen, die wir hoffentlich schon kennen.
- Einige Zahlenmengen
  - $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die natürlichen Zahlen
  - $\mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, \ldots\}$ die positiven natürlichen Zahlen
  - $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ die ganzen Zahlen
  - $\mathbb{Z} \setminus \{0\} := \{1, -1, 2, -2, \ldots\}$ die ganzen Zahlen außer $0$.

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ (gelesen “seien $a$ und $b$ Elemente von $\mathbb{Z}$”). Wir sagen dass $a$ teilt $b$, oder $a$ ist ein Teiler von $b$, geschrieben $a \mid b$, falls es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $ak = b$.

- Sehr häufig benutzen wir die folgende Eigenschaften:
  - Seien $d, a, b \in \mathbb{Z}$. Falls $d \mid a$ und $d \mid b$ dann $d \mid a + b$.

    ▷ Beweis: Falls $d \mid a$ und $d \mid b$ dann existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ so dass $a = dk, b = dl$, woraus folgt $a + b = d(k + l)$, was bedeutet, dass $d \mid a + b$.
  - Seien $d, a, b \in \mathbb{Z}$. Falls $d \mid a$ dann $d \mid ab$.

    ▷ Beweis: Falls $d \mid a$ dann existiert $k \in \mathbb{Z}$ so dass $a = dk$, also $ab = dkb$, was bedeutet $d \mid ab$.

- Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq 0$. Dann können wir immer die Division mit Rest durchführen, d.h. wir schreiben $b = qa + r$, für irgenwelche $q, r \in \mathbb{N}$, wobei $r < a$.
  - $r$ heißt der Rest, und $q$ heißt der Ganzzahlquotient. Diese Zahlen $r$ und $q$ sind eindeutig.
  - Z.B. $a = 7, b = 45$, $45 = 6 \cdot 7 + 3$.
- Falls wir die Division mit Rest für $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, durchführen möchten, schreiben wir $b = qa + r$, wobei $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ und $r < |a|$.
  - Z.B. $a = -7, b = 45$, $-45 = 7 \cdot (-7) + 4$.
- Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$. Der grösste gemeinsame Teiler von $a$ und $b$ ist die grösste narürliche Zahl $d$ mit der Eigenschaft, dass $d \mid a$ und $d \mid b$. Sie wird mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ bezeichnet.
  - z.B. $\mathrm{ggT}(10, 17) = 1$, $\mathrm{ggT}(49, 14) = 7$,
  - für $a \in \mathbb{N}_+$ setzen wir $\mathrm{ggT}(0, a) := a$, $\mathrm{ggT}(a, 0) = a$, aber $\mathrm{ggT}(0, 0) := 0$.

- Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ dann definieren wir $\mathrm{ggT}(a, b) := \mathrm{ggT}(|a|, |b|)$. Also wenn $a, b \in \mathbb{Z}$, ist $\mathrm{ggT}(a, b) \in \mathbb{N}$.
  - z.B. $\mathrm{ggT}(-49, -14) = 7$.
- Der $\mathrm{ggT}$ wird mit dem Euklidichem Algorithmus berechnet (nächste Woche).



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

**Łukasz Grabowski**
Mathematisches Institut

grabowski@math.uni-leipzig.de