Lineare Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 3

3.1 Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl a gibt es eine natürliche Zahl $b > a$, die durch 6 teilbar ist. Formulieren Sie die Aussage auch mit Quantoren.

3.2 Zeigen Sie: Es gibt eine positive natürliche Zahl k, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{ggT}(n, n+k) = 1$. Formulieren Sie die Aussage auch mit Quantoren.

3.3 Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl a gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle natürlichen Zahlen $n > N$ gilt: $n^2 > an$. Formulieren Sie die Aussage auch mit Quantoren.

3.4 Zeigen Sie: Es gibt eine natürliche Zahl k, sodass man für jede natürliche Zahl n eine gerade natürliche Zahl m finden kann mit $n \leqslant m \leqslant n + k$. Formulieren Sie die Aussage auch mit Quantoren.

3.5 Sei U eine Menge. Zeigen Sie: Für je zwei Teilmengen A, B von U gibt es eine Teilmenge C von U, sodass $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ und $A \cup B \cup C = U$. Formulieren Sie die Aussage auch mit Quantoren.

3.6 **[10]**

Für zwei Mengen A, B definieren wir die symmetrische Differenz wie folgt:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Seien A und B Mengen aus einem Universum U. Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Bei einer Widerlegung ist ein Beispiel anzugeben, in dem die gegebene Gleichung nicht gilt. Sie können Eigenschaften von

(a) Es gilt $A \triangle A = \emptyset$.

(b) Es gilt $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(c) Es gilt $(A \triangle B) \triangle C = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$.

3.7 (In Übungseinheiten: nur de Morgan) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften. Benutzen Sie dabei die entsprechenden logischen Eigenschaften.

Gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$	A	Involution $\cdot^{\mathrm{c}}$
$(A \cap B)^{\mathrm{c}}$	$A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$	De-Morgan-Gesetz für $\cap$
$(A \cup B)^{\mathrm{c}}$	$A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$	De-Morgan-Gesetz für $\cup$

3.8 Wir betrachten das Universum $U = \{a, b, c\}$ und die Formel

$$F = \forall x(\neg A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge \exists x(A(x) \Rightarrow \neg B(x)).$$

Geben Sie für die Prädikate A und B jeweils Teilmengen von U an, sodass

(a) F erfüllt wird.

(b) F nicht erfüllt wird.

(c) $\neg F$ erfüllt ist.

(d) Formen Sie $\neg F$ so um, dass Negationen nur vor den Atomen stehen.

0.1 “Nicht Lehramt”

3.9 Zeigen Sie direkt aus der Definition

(a) $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$

(b) (nur falls alle Mengen Teilmengen eines Universum U sind) $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$.