Lineare Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 2

2.1 **[10]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

2.2 **[10]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

2.3 Führen Sie den Euklidischen Algorithmus für die folgenden Paare durch. Nutzen Sie es in jedem Fall um ggT zu berechnen.

(a) 123 und 39

(b) 60 und 156

2.4 Finden Sie eine ganzzahlige Lösung.

(a) $35X + 10Y = 5$

(b) $43X - 12Y = 1$

Solution.

(a) Wir lösen erst $7X + 2Y = 1$, und multipliezieren danach die Lösungen durch 5. Euklidischer Algorithmus:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1,$$

also eine Lösung ist $x = 5, y = -15$.

(b) Euklidischer Algorithmus (für 43 und 12):

$$\begin{aligned} 43 &= 3 \cdot 12 + 7 \\ 12 &= 1 \cdot 7 + 5 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Also $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 3 \cdot (12 - 1 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot (43 - 3 \cdot 12) = -5 \cdot 43 + 18 \cdot 12$. Deswegen eine Lösung ist $x = -5, y = -18$.

2.5 Berechnen Sie den Rest.

(a) $2^{67} \cdot 7^{23} \ : \ 11$

(b) $10^{23} + 8^{63} \ : \ 17$

Solution.

(a) Modulo 11 haben wir $2^{67} \cdot 7^{23} \equiv 4 \cdot (2^5)^1 3 \cdot (-4)^2 3 \equiv 4 \cdot (-1)^{13} \cdot 4 \cdot (2^4)^{11} \equiv -4 \cdot 4 \cdot 2^4 \cdot (2^5)^4 \equiv -4 \cdot -64 \cdot (-1)^4 \equiv -4 \cdot 2 \equiv 3$

(b) Modulo 17 haben wir $10 \cdot 100^{11} + 8 \cdot (2^6)^{31} \equiv 10 \cdot (-2)^{11} + 8 \cdot 2^6 \cdot (2^{12})^{31} \equiv 10 \cdot -2^3 \cdot (2^4)^2 + 2 \cdot (2^4)^2 \cdot (2^4)^{93} \equiv 5 \cdot -16 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^2 \cdot 16^{93} \equiv 5 - 2 \equiv 3.$

2.6 Formulieren Sie für jede der folgenden Aussagen die jeweilige **Kontraposition**.

1. Ist eine natürliche Zahl durch 6 teilbar, so ist sie auch durch 2 und durch 3 teilbar.

2. Wenn n gerade ist, dann ist $n^2 + 2n - 4$ gerade.

Solution.

1. Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar ist, so ist sie auch nicht durch 6 teilbar.

2. Wenn $n^2 + 2n - 4$ ungerade ist, so ist n ungerade.

2.7 Seien $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass die Gleichung $aX + bY = n$ hat eine ganzzahlige Lösung gdw. $\text{ggT}(a, b) \mid n$

Solution. Sei $d := \text{ggT}(a, b)$.

Angenommen die Gleichung hat eine Lösung $x, y \in \mathbb{Z}$, es folgt dass $ax + by = n$. Jetzt d teilt $ax + by$, also d teilt auch n.

Jetzt nehmen wir an dass $d \mid n$. Aus dem Lemma von Bezout folgt es dass die Gleichung $aX + bY = d$ eine ganzahlige Lösung (x, y) hat. Dann $(\frac{n}{d}x, \frac{n}{d}y)$ ist eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $aX + bY = n$.

2.8 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\text{ggT}(n, n+2) = 2$, falls n gerade ist, und $\text{ggT}(n, n+2) = 1$, falls n ungerade ist.

Solution.

- Sei $d := \text{ggT}(n, n+2)$. Dann gilt $d \mid n$ und $d \mid n+2$, also auch $d \mid (n+2) - n = 2$.
- Da d positiv ist, folgt $d = 1$ oder $d = 2$.
- Falls n gerade ist, sind sowohl n als auch $n+2$ durch 2 teilbar. Also ist $d = 2$.
- Falls n ungerade ist, kann d nicht gleich 2 sein. Also ist $d = 1$.

2.9 **[10]**

Sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass bei der Division von p durch 6 nur die Reste 1 und 5 auftreten können.

Solution.

- Durch Division mit Rest können wir $p = 6q + r$ schreiben, wobei $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Da $p > 3$ eine Primzahl ist, gilt $2 \nmid p$ und $3 \nmid p$.
- Falls $r = 0$, $r = 2$ oder $r = 4$, ist p durch 2 teilbar.
- Falls $r = 3$, ist p durch 3 teilbar.
- Somit bleiben nur $r = 1$ und $r = 5$.

2.10 **[10]**

Es seien die folgenden Prädikate gegeben:

- $F(x)$ drückt aus: "x ist ein Fenster".
- $D(x)$ drückt aus: "x ist doppelt verglast".
- $S(x)$ drückt aus: "x ist eine Schule'.
- $B(x, y)$ drückt aus: "x befindet sich in y".

1. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:
   (a) Es existiert eine Schule.
   (b) Es existiert ein Fenster, das nicht doppelt verglast ist.
   (c) Es existiert eine Schule, in der alle Fenster doppelt verglast sind.
2. Formulieren Sie die folgende Aussage in natürlicher Sprache:

(iv) $\forall z \ \big(F(z) \wedge D(z) \ \Rightarrow \ (\exists x \ S(x) \wedge B(z,x))\big)$

Solution.

1. $\exists x : S(x)$
2. $\exists x : \neg D(x)$
3. z.B. $\exists x \forall y \ \ S(x) \wedge ((F(y) \wedge B(y,x)) \Rightarrow D(y))$
4. Am besten wäre etwas wie "Nur Schulen haben doppelt verglaste Fenster", aber auch andere Möglichkeiten sind in Ordnung.

2.11 Es seien die folgenden ‘Prädikate gegeben:

- $M(x)$ drückt aus, dass x ein Mond ist.
- $K(x)$ drückt aus, dass x Käse ist.
- $T(x,y)$ drückt aus, dass x durch y teilbar ist.

1. **Formalisieren** Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:
   (a) Alle Monde sind Käse.
   (b) Es gibt keinen Mond, der Käse ist.
   (c) Es gibt zwei Monde, die durch denselben Käse teilbar sind.
2. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache:
   (iv) $\forall z(K(z) \vee \neg K(z))$
   (v) $\exists x \forall y(K(x) \wedge (M(y) \Rightarrow T(x,y)))$

Solution.

1. (a) $\forall x(M(x) \rightarrow K(x))$
   (b) $\neg\exists x(M(x) \wedge K(x))$
   (c) $\exists x \, \exists y \, \exists z(M(x) \wedge M(y) \wedge K(z) \wedge T(x,z) \wedge T(y,z))$. Sind explizit zwei verschiedene Monde gemeint, muss man noch $x \neq y$ hinzufügen, denn anderenfalls kann man x und y durchaus mit demselben Mond belegen.
   (d) Alle Dinge sind Käse oder sind nicht Käse.
   (e) Es gibt einen Käse, der durch alle Monde teilbar ist.

2.12 (in Übungseinheiten bitt nur die ersten zwei besprechen) Schreiben Sie die folgenden Prädikate als Formeln (Sie können alle üblichen arithmetischen Symbole wie $=, <, \leqslant, +, \cdot, |$ verwenden. Sie können annehmen, dass das Universum aller Objekte $\mathbb{N}$ ist.

- $A(x) :=$ "x ist eine Summe von zwei Quadraten natürlicher Zahlen."
- $B(x, y, z) :=$ "x ist der größte gemeinsame Teiler von y und z"
- $C(x) :=$ "x ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen."
- $D(x, y) :=$ "Zwischen x und y liegt eine Quadratzahl."
- $F(x, y) :=$ "x und y sind teilerfremd."
- $G(x, y) :=$ "x ist die größte Quadratzahl, die kleiner oder gleich y ist."
- $H(x, y) :=$ "x ist die kleinste natürliche Zahl, die größer als y und durch 6 teilbar ist."

Solution.

- $\exists_{y,z}\ x = y^2 + z^2$
- $x|y, x|z, (\forall_a\ a|y, a|z \Rightarrow a \leqslant x)$
- $\exists_a\,(x = a(a+1))$
- $\exists_a\,(x < a^2 \wedge a^2 < y)$
- $\forall_a\,((a \mid x \wedge a \mid y) \Rightarrow a \leqslant 1)$
- $\exists_a\,(x = a^2 \wedge x \leqslant y \wedge \forall_b\,(b^2 \leqslant y \Rightarrow b^2 \leqslant x))$
- $(x > y) \wedge (6 \mid x) \wedge \forall_a\,((a > y \wedge 6 \mid a) \Rightarrow x \leqslant a)$

2.13 Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie dass $a \equiv b \mod n$ gdw. $n \mid a - b$.

Solution.

2.14 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass $n^2 \equiv 0 \mod 4$ oder $n^2 \equiv 1 \mod 4$.

2.15 • Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $d_k \ldots d_0$ die Dezimalstellen von n. Dann $9 \mid n$ gdw $9 \mid d_0 + \ldots + d_k$.

• Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $d_k \ldots d_0$ die Dezimalstellen von n. Dann $11 \mid n$ gdw $11 \mid d_0 - d_1 + d_2 - \ldots + (-1)^k d_k$.

Solution.

- Wir haben $n = d_0 + 10 \cdot d_1 + 100 \cdot d_2 + \ldots + 10^k \cdot d_k$.

Wir haben $10^k = 99\ldots9+1 = 9 \cdot 11\ldots1+1$, also $10^k \equiv 1 \mod 9$ for all k. Es folgt dass $n \equiv d_0 + d_1 + \ldots d_k \mod 9$.

Insbesondere $n \equiv 0 \mod 9$ gdw $d_0 + \ldots d_k \equiv 0 \mod 9$.

- Wir haben $n = d_0 + 10 \cdot d_1 + 100 \cdot d_2 + \ldots + 10^k \cdot d_k$.

Wenn $k = 2l$ gerade ist, haben wir $10^{2l} = 100^l$. Da $100 = 9 \cdot 11 + 1 \equiv 1 \mod 11$, es folg dass $10^k \equiv 1^l \equiv 1 \mod 11$.

Wenn $k = 2l+1$ ungerade ist, haben wir $10^{2l+1} \equiv 100^l \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10 \mod 11$. Da $10 \equiv -1$, es folg dass $10^k \equiv -1 \mod 11$.

Es folg dass $n \equiv d_0 - d_1 + d_2 \ldots + (-1)^k d_k \mod 11$.

Insbesondere $n \equiv 0 \mod 11$ gdw $d_0 - d_1 + d_2 \ldots + (-1)^k d_k \equiv 0 \mod 11$.

2.16 • Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie dass $3 \mid n^2$ gdw $3 \mid n$.

- Beweisen Sie dass es keine rationale Zahl q gibt, sodass $q^2 = 3$.

Solution. Beweis durch Widerspruch. Sei q eine rational Zahl sodass $q^2 = 3$. Dann können wir Teilrfremde ganze Zahlen a, b finden sodass $q = \frac{a}{b}$, also auch $q^2 = \frac{a^2}{b^2} = 3$. Weswegen $a^2 = 3b^2$, also $3 \mid a^2$. Die letzt Aufgabe zeigt jetzt dass $3 \mid a$, also $a = 3c$ für irgendwelche $c \in \mathbb{Z}$. Deswegen $(3c)^2 = 3b^2$, also $3c^2 = b^2$, weswegen $3 \mid b^2$, also auch $3 \mid b$. Das bedeutet dass $\text{ggT}(a, b) \geqslant 3$, was ein Widerspruch mit der Aussage ist, dass a und b Teilerfremd sind.

"Nicht Lehramt"

2.17 Sei p eine Primzahl, und seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass falls $p \mid ab$ dann $p \mid a$ oder $p \mid b$.

(Diese Aussage ist auch als Lemma von Euclid bekannt. Hinweis: versuchen Sie ein Beweis durch Widerspruch zu finden, und benutzen Sie das Lemma von Bezout)

Solution. Beweis durch Widerspruch. Nehmer wir an, dass $p \nmid a$ und $p \nmid b$. Insbesondere $\text{ggT}(p, a) = 1$, und mithilfe des Lemmas von Bezout finden wir $x, y \in \mathbb{Z}$ sodass $xp+ya = 1$. Nach der multiplizierung durch b erhalten wir $xpb + yab = b$. Da $p \mid xpb$ und $p \mid yab$, erhalten wir dass $p \mid b$, was ein Widerspruch ist. Dies zeigt dass unsere Aussage wahr ist.

2.18 Sei p eine Primzahl und sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass $p \mid n$ gdw $p \mid n^2$.

Solution. Nehmen wir erst an dass $p \mid n$, also $n = pk$ für irgendwelche $k \in \mathbb{Z}$. Dann $n^2 = p^2k^2$, was bedeutet dass $p^2 \mid n^2$.

Für die andere Implikation, benutzen wir die letzte Aufgabe mit $a = n, b = n$

2.19 Entscheide ob die Aussagen "$2^n - 1$ ist prim" und "n ist prim" äquivalent sind.

2.20 Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie dass es keine rationale Zahl q gibt, sodass $q^2 = p$.

Solution. Beweis durch Widerspruch. Sei q eine rational Zahl sodass $q^2 = p$. Dann können wir Teilerfremde ganze Zahlen a, b finden sodass $q = \frac{a}{b}$, also auch $q^2 = \frac{a^2}{b^2} = p$. Weswegen $a^2 = pb^2$, also $p \mid a^2$. Die letzte Aufgabe zeigt jetzt dass $p \mid a$, also $a = pc$ für irgendwelche $c \in \mathbb{Z}$. Deswegen $(pc)^2 = pb^2$, also $pc^2 = b^2$, weswegen $p \mid b^2$, also auch $p \mid b$. Das bedeutet dass $\text{ggT}(a, b) \geqslant p$, was ein Widerspruch mit der Aussage ist, dass a und b Teilerfremd sind.

2.21 • Das Prinzip "Beweis durch Widersprcuh" können wir so formulieren: $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$. Zeigen Sie, dass dies eine Tautologie ist.

• Bauen Sie eine Formel die drückt aus, dass eine Äquivalenz durch zwei Implikationen bewiesen werden kann. Überprüfen Sie, dass diese Formel eine Tautologie ist.

Solution.