Lineare Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 2

2.1 **[10]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

2.2 **[10]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

2.3 Führen Sie den Euklidischen Algorithmus für die folgenden Paare durch. Nutzen Sie es in jedem Fall um ggT zu berechnen.

(a) 123 und 39

(b) 60 und 156

2.4 Finden Sie eine ganzzahlige Lösung.

(a) $35X + 10Y = 5$

(b) $43X - 12Y = 1$

2.5 Berechnen Sie den Rest.

(a) $2^{67} \cdot 7^{23} \ : \ 11$

(b) $10^{23} + 8^{63} \ : \ 17$

2.6 Formulieren Sie für jede der folgenden Aussagen die jeweilige **Kontraposition**.

1. Ist eine natürliche Zahl durch 6 teilbar, so ist sie auch durch 2 und durch 3 teilbar.
2. Wenn n gerade ist, dann ist $n^2 + 2n - 4$ gerade.

2.7 Seien $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass die Gleichung $aX + bY = n$ hat eine ganzzahlige Lösung gdw. $\text{ggT}(a, b) \mid n$

2.8 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\text{ggT}(n, n+2) = 2$, falls n gerade ist, und $\text{ggT}(n, n+2) = 1$, falls n ungerade ist.

2.9 **[10]**

Sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass bei der Division von p durch 6 nur die Reste 1 und 5 auftreten können.

2.10 **[10]**

Es seien die folgenden Prädikate gegeben:

- $F(x)$ drückt aus: "x ist ein Fenster".
- $D(x)$ drückt aus: "x ist doppelt verglast".
- $S(x)$ drückt aus: "x ist eine Schule'.
- $B(x, y)$ drückt aus: "x befindet sich in y".

1. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:
   (a) Es existiert eine Schule.
   (b) Es existiert ein Fenster, das nicht doppelt verglast ist.
   (c) Es existiert eine Schule, in der alle Fenster doppelt verglast sind.
2. Formulieren Sie die folgende Aussage in natürlicher Sprache:
   (iv) $\forall z \ \big(F(z) \wedge D(z) \ \Rightarrow \ (\exists x \ S(x) \wedge B(z, x))\big)$

2.11 Es seien die folgenden 'Prädikate gegeben:

- $M(x)$ drückt aus, dass x ein Mond ist.
- $K(x)$ drückt aus, dass x Käse ist.
- $T(x, y)$ drückt aus, dass x durch y teilbar ist.

1. **Formalisieren** Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

(a) Alle Monde sind Käse.

(b) Es gibt keinen Mond, der Käse ist.

(c) Es gibt zwei Monde, die durch denselben Käse teilbar sind.

2. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache:

(iv) $\forall z(K(z) \vee \neg K(z))$

(v) $\exists x \forall y(K(x) \wedge (M(y) \Rightarrow T(x, y)))$

2.12 (in Übungseinheiten bitt nur die ersten zwei besprechen) Schreiben Sie die folgenden Prädikate als Formeln (Sie können alle üblichen arithmetischen Symbole wie $=, <, \leqslant, +, \cdot, |$ verwenden. Sie können annehmen, dass das Universum aller Objekte $\mathbb{N}$ ist.

- $A(x) :=$ "x ist eine Summe von zwei Quadraten natürlicher Zahlen."
- $B(x, y, z) :=$ "x ist der größte gemeinsame Teiler von y und z"
- $C(x) :=$ "x ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen."
- $D(x, y) :=$ "Zwischen x und y liegt eine Quadratzahl."
- $F(x, y) :=$ "x und y sind teilerfremd."
- $G(x, y) :=$ "x ist die größte Quadratzahl, die kleiner oder gleich y ist."
- $H(x, y) :=$ "x ist die kleinste natürliche Zahl, die größer als y und durch 6 teilbar ist."

2.13 Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie dass $a \equiv b \mod n$ gdw. $n \mid a - b$.

2.14 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass $n^2 \equiv 0 \mod 4$ oder $n^2 \equiv 1 \mod 4$.

2.15 • Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $d_k \dots d_0$ die Dezimalstellen von n. Dann $9 \mid n$ gdw $9 \mid d_0 + \dots + d_k$.

• Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $d_k \dots d_0$ die Dezimalstellen von n. Dann $11 \mid n$ gdw $11 \mid d_0 - d_1 + d_2 - \dots + (-1)^k d_k$.

2.16 • Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie dass $3 \mid n^2$ gdw $3 \mid n$.

• Beweisen Sie dass es keine rationale Zahl q gibt, sodass $q^2 = 3$.

"Nicht Lehramt"

2.17 Sei p eine Primzahl, und seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass falls $p \mid ab$ dann $p \mid a$ oder $p \mid b$.

(Diese Aussage ist auch als Lemma von Euclid bekannt. Hinweis: versuchen Sie ein Beweis durch Widerspruch zu finden, und benutzen Sie das Lemma von Bezout)

2.18 Sei p eine Primzahl und sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie dass $p \mid n$ gdw $p \mid n^2$.

2.19 Entscheide ob die Aussagen "$2^n - 1$ ist prim" und "n ist prim" äquivalent sind.

2.20 Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie dass es keine rationale Zahl q gibt, sodass $q^2 = p$.

2.21 • Das Prinzip "Beweis durch Widersprcuh" können wir so formulieren: $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$. Zeigen Sie, dass dies eine Tautologie ist.

• Bauen Sie eine Formel die drückt aus, dass eine Äquivalenz durch zwei Implikationen bewiesen werden kann. Überprüfen Sie, dass diese Formel eine Tautologie ist.