# Lineare Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 1

---

**1.1** **[10]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

---

**1.2** Gegeben sei folgende aussagenlogische Formel $F$:

$$(A \iff B) \wedge (\neg(C \Rightarrow A))$$

Erstellen Sie für $F$ eine Wahrheitswertetabelle, und entscheiden Sie ob $F$ erfüllbar ist (begründen Sie Ihre Antwort).

*Solution.* Wahrheitswertetabelle:

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \iff B)$ | $\wedge$ | $(\neg$ | $(C \Rightarrow A))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Die Formel ist erfüllbar, da wir die folgende erfüllende Belegung angeben können: $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$ .

---

**1.3** **[10]**

Ähnlich wie in der Vorlesung ("Anton ist Mörder" usw.), schreiben Sie fünf elementare Aussagen, die für das folgende Gesetz relevant sind (BGB 90a Tiere). Bilden Sie drei komplexere Aussagen unter Verwendung von Junktoren, die der Bedeutung des Gesetzes entsprechen (ähnlich zu "Anton tötet heimtückisch oder Anton tötet aus Habgier", "Wenn Anton ist Mörder dann Anton bekommt lebenslange Freiheitsstrafe" usw.)

"Tiere sind keine Sachen. Sie werden durch besondere Gesetze geschützt. Auf sie sind die für Sachen geltenden Vorschriften entsprechend anzuwenden, soweit nicht etwas anderes bestimmt ist."

*Solution.* (Beispiel)

A = "Balu ist ein Tier", B = "Balu ist eine Sache", C= "Balu ist durch besondere Gesetze geschützt", D="Im Bezug mit der Ehescheidung, an Balu sind die für Sachen geltenden Vorschriften anzuwenden.", E= "Im Bezug mit der Ehescheidung gibt es besondere Vorschriften für Eigentum von Tieren".

Die gültigen Aussagen sind jetzt z.B. $A \Rightarrow \neg B$, $A \Rightarrow C$, $(A \wedge E) \Rightarrow \neg D$.

---

**1.4** Sei $A$ die Aussage "Die Kamera funktioniert". Schreiben Sie die folgenden Sätze als logische Aussagen. Entscheiden Sie dann ob Sie wahr oder falsch sind, abhängig davon ob $A$ wahr oder falsch ist..

- Wenn die Kamera funktioniert, dann funktioniert die Kamera genau dann nicht, wenn sie nicht funktioniert.
- Wenn die Kamera funktioniert, dann funktioniert die Kamera genau dann nicht, wenn sie funktioniert.
- Wenn die Kamera nicht funktioniert, dann wenn sie funktioniert, dann funktioniert sie nicht.

*Solution.*

- $A \Rightarrow (\neg A \iff \neg A)$ Das ist eine Tautologie, also eine wahre Aussage, unabhängig davon ob $A$ wahr ist (d.h. unabhängig davon ob die Kmaera funktionier oder nicht)
- $A \Rightarrow (\neg A \iff A)$. Falls $A$ wahr ist dann diese Formel ist falsch. Sonst ist die Formel wahr.
- $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)$. Die Formel ist tautologisch.

---

**1.5** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Falls $a \mid b$ und $b \mid a$, dann gilt $a = b$ oder $a = -b$.

*Solution.*

- Falls $a = 0$, folgt aus $a \mid b$, dass $b = 0$. Die Behauptung gilt also in diesem Fall.
- Sei nun $a \neq 0$. Aus $a \mid b$ und $b \mid a$ folgt, dass es $k, l \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ak$ und $a = bl$.
- Also gilt $a = akl$. Da $a \neq 0$, folgt $kl = 1$.
- Da $k, l \in \mathbb{Z}$, muss $k = 1$ oder $k = -1$ gelten. Somit ist $b = a$ oder $b = -a$.

---

**1.6** **[10]**

Seien $a, b, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b + ka)$.

*Solution.*

- Falls $a = b = 0$, sind beide Seiten gleich 0.
- Sei also $(a, b) \neq (0, 0)$. Wir zeigen, dass die Paare $(a, b)$ und $(a, b + ka)$ dieselben gemeinsamen positiven Teiler haben.
- Sei $d \in \mathbb{N}_+$ mit $d \mid a$ und $d \mid b$. Dann gilt auch $d \mid ka$ und somit $d \mid b + ka$.

• Sei umgekehrt $d \in \mathbb{N}_+$ mit $d \mid a$ und $d \mid b + ka$. Dann gilt auch $d \mid -ka$ und somit $d \mid (b + ka) - ka = b$.

• Die gemeinsamen positiven Teiler sind also dieselben. Insbesondere sind die größten gemeinsamen Teiler gleich.

---

**1.7** Seien $a \in \mathbb{N}_+$ und $b \in \mathbb{Z}$. Angenommen, es gilt $b = qa + r = q'a + r'$ mit $q, q' \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r, r' < a$. Zeigen Sie, dass $q = q'$ und $r = r'$.

*Solution.*

• Aus $qa + r = q'a + r'$ folgt $a(q - q') = r' - r$.

• Wegen $0 \leq r, r' < a$ gilt $-a < r' - r < a$, also $|r' - r| < a$.

• Falls $q \neq q'$, ist $|q - q'| \geq 1$ und somit $|a(q - q')| \geq a$. Dies ist ein Widerspruch.

• Also gilt $q = q'$. Aus $qa + r = q'a + r'$ folgt dann auch $r = r'$.

---

**1.8** Zeigen Sie, dass bei der Division von $n^2$, wobei $n \in \mathbb{Z}$, durch 4 nur die Reste 0 und 1 auftreten können.

*Solution.*

• Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem, ob $n$ gerade oder ungerade ist.

• Falls $n$ gerade ist, gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$. Dann gilt $n^2 = 4k^2$, also ist der Rest 0.

• Falls $n$ ungerade ist, gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k + 1$. Dann gilt $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, also ist der Rest 1.

• Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

**1.9** Beweisen Sie mitte Wahrheitstabelle die folgenden Äquivalenzen. (In der Übungseinheiten bitte nur eine Kommutativität, eine Distributivität, und beide De-Morgan-Gesetze besprechen)

| | | |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | $B \wedge A$ | Kommutativität von $\wedge$ |
| $A \vee B$ | $B \vee A$ | Kommutativität von $\vee$ |
| $(A \wedge B) \wedge C$ | $A \wedge (B \wedge C)$ | Assoziativität von $\wedge$ |
| $(A \vee B) \vee C$ | $A \vee (B \vee C)$ | Assoziativität von $\vee$ |
| $A \wedge (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributivität von $\wedge$ |
| $A \vee (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | Distributivität von $\vee$ |
| $A \wedge A$ | $A$ | Idempotenz von $\wedge$ |
| $A \vee A$ | $A$ | Idempotenz von $\vee$ |
| $\neg\neg A$ | $A$ | Involution $\neg$ |
| $A \vee \neg A$ | $1$ | Ausgeschlossenes Drittes |
| $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | De-Morgan-Gesetz für $\wedge$ |
| $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | De-Morgan-Gesetz für $\vee$ |
| $A \wedge (A \vee B)$ | $A$ | Absorptionsgesetz für $\wedge$ |
| $A \vee (A \wedge B)$ | $A$ | Absorptionsgesetz für $\vee$ |
| $A \Rightarrow B$ | $\neg A \vee B$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $A \iff B$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ | Elimination von $\iff$ |

Es empfiehlt sich, für sich selbst diese Äquivalenzen auch mal an konkreten Beispielen für die Aussagen $A$, $B$ und $C$ zu veranschaulichen.

---

**1.10** Beweisen Sie mit Hilfe einer Äquivalenzkette, dass die Formeln $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent sind. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

*Solution.*

- $A \to B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$ (Elimination $\to$)
- $\neg A \vee B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee \neg\neg B$ (Involution $\neg$)
- $\neg A \vee \neg\neg B$ ist äquivalent zu $\neg\neg B \vee \neg A$ (Kommutativität $\vee$)
- $\neg\neg B \vee \neg A$ ist äquivalent zu $\neg B \to \neg A$ (Elimination $\to$)

---

**1.11** (nicht für die Übungseinheiten) Beweisen Sie mit Hilfe einer Äquivalenzkette, dass die Formeln $(A \vee \neg B) \Rightarrow B$ und $B$ äquivalent sind. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

*Solution.*

$$
\begin{aligned}
& (A \vee \neg B) \Rightarrow B \\
\iff & \neg(A \vee \neg B) \vee B && \text{(Reformulierung } \Rightarrow\text{)} \\
\iff & (\neg A \wedge \neg\neg B) \vee B && \text{(DeMorgan)} \\
\iff & (\neg A \wedge B) \vee B && \text{(doppelte Negation)} \\
\iff & B && \text{(Absorption)}
\end{aligned}
$$

---

**1.12** Führen Sie die folgenden Divisionen mit Rest durch.

(a) $112 : 34$, $-112 : 34$, $112 : -34$, $-112 : -34$

(b) (nicht für die Übungseinheiten) $97 : 23$, $-97 : 23$, $97 : -23$, $-97 : -23$