# Lineare Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 1

---

**1.1** **[10]**

(bitte direkt auf moodle als Quiz-Frage antworten.)

---

**1.2** Gegeben sei folgende aussagenlogische Formel $F$:

$$(A \iff B) \wedge (\neg(C \Rightarrow A))$$

Erstellen Sie für $F$ eine Wahrheitswertetabelle, und entscheiden Sie ob $F$ erfüllbar ist (begründen Sie Ihre Antwort).

---

**1.3** **[10]**

Ähnlich wie in der Vorlesung ("Anton ist Mörder" usw.), schreiben Sie fünf elementare Aussagen, die für das folgende Gesetz relevant sind (BGB 90a Tiere). Bilden Sie drei komplexere Aussagen unter Verwendung von Junktoren, die der Bedeutung des Gesetzes entsprechen (ähnlich zu "Anton tötet heimtückisch oder Anton tötet aus Habgier", "Wenn Anton ist Mörder dann Anton bekommt lebenslange Freiheitsstrafe" usw.)

"Tiere sind keine Sachen. Sie werden durch besondere Gesetze geschützt. Auf sie sind die für Sachen geltenden Vorschriften entsprechend anzuwenden, soweit nicht etwas anderes bestimmt ist."

---

**1.4** Sei $A$ die Aussage "Die Kamera funktioniert". Schreiben Sie die folgenden Sätze als logische Aussagen. Entscheiden Sie dann ob Sie wahr oder falsch sind, abhängig davon ob $A$ wahr oder falsch ist..

- Wenn die Kamera funktioniert, dann funktioniert die Kamera genau dann nicht, wenn sie nicht funktioniert.
- Wenn die Kamera funktioniert, dann funktioniert die Kamera genau dann nicht, wenn sie funktioniert.
- Wenn die Kamera nicht funktioniert, dann wenn sie funktioniert, dann funktioniert sie nicht.

---

**1.5** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Falls $a \mid b$ und $b \mid a$, dann gilt $a = b$ oder $a = -b$.

---

**1.6** **[10]**

Seien $a, b, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b + ka)$.

---

**1.7** Seien $a \in \mathbb{N}_+$ und $b \in \mathbb{Z}$. Angenommen, es gilt $b = qa + r = q'a + r'$ mit $q, q' \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r, r' < a$. Zeigen Sie, dass $q = q'$ und $r = r'$.

---

**1.8** Zeigen Sie, dass bei der Division von $n^2$, wobei $n \in \mathbb{Z}$, durch 4 nur die Reste 0 und 1 auftreten können.

---

**1.9** Beweisen Sie mitte Wahrheitstabelle die folgenden Äquivalenzen. (In der Übungseinheiten bitte nur eine Kommutativität, eine Distributivität, und beide De-Morgan-Gesetze besprechen)

| | | |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | $B \wedge A$ | Kommutativität von $\wedge$ |
| $A \vee B$ | $B \vee A$ | Kommutativität von $\vee$ |
| $(A \wedge B) \wedge C$ | $A \wedge (B \wedge C)$ | Assoziativität von $\wedge$ |
| $(A \vee B) \vee C$ | $A \vee (B \vee C)$ | Assoziativität von $\vee$ |
| $A \wedge (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributivität von $\wedge$ |
| $A \vee (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | Distributivität von $\vee$ |
| $A \wedge A$ | $A$ | Idempotenz von $\wedge$ |
| $A \vee A$ | $A$ | Idempotenz von $\vee$ |
| $\neg\neg A$ | $A$ | Involution $\neg$ |
| $A \vee \neg A$ | $1$ | Ausgeschlossenes Drittes |
| $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | De-Morgan-Gesetz für $\wedge$ |
| $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | De-Morgan-Gesetz für $\vee$ |
| $A \wedge (A \vee B)$ | $A$ | Absorptionsgesetz für $\wedge$ |
| $A \vee (A \wedge B)$ | $A$ | Absorptionsgesetz für $\vee$ |
| $A \Rightarrow B$ | $\neg A \vee B$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $A \iff B$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ | Elimination von $\iff$ |

Es empfiehlt sich, für sich selbst diese Äquivalenzen auch mal an konkreten Beispielen für die Aussagen $A$, $B$ und $C$ zu veranschaulichen.

---

**1.10** Beweisen Sie mit Hilfe einer Äquivalenzkette, dass die Formeln $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent sind. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

---

**1.11** (nicht für die Übungseinheiten) Beweisen Sie mit Hilfe einer Äquivalenzkette, dass die Formeln $(A \vee \neg B) \Rightarrow B$ und $B$ äquivalent sind. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Umformungsregel angewendet wurde.

---

**1.12** Führen Sie die folgenden Divisionen mit Rest durch.

(a) $112 : 34$, $-112 : 34$, $112 : -34$, $-112 : -34$

(b) (nicht für die Übungseinheiten) $97 : 23$, $-97 : 23$, $97 : -23$, $-97 : -23$