

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Smith-Normalform

4. Semidirekte Produkte

5. Quaternionengruppe

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Smith-Normalform

4. Semidirekte Produkte

5. Quaternionengruppe

- Anwendungen von Wirkungen:
  - S_3 ist die einzige nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6.
  - Isometriegruppen von platonischen Körper.
- Wirkung von G auf sich selbst durch die Konjugation: $g.x := gxg^{-1}$ gibt uns die Klassengleichung:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} |x_i^G|,$$

wobei x_i die Verterete von Konjugationsklassen sind.

- Korollar: jede p-Gruppe G hat $Z(G) \neq \{e\}$.
  - Jede endliche p-Gruppe ist nilpotent.

Satz. (Cauchy) Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl mit $p \mid |G|$. Dann enthält G ein Element der Ordnung p.

- der einzige nichtriviale echte Normalteiler von S_n, $n \geqslant 5$, ist A_n.

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Smith-Normalform

4. Semidirekte Produkte

5. Quaternionengruppe

- Jede ganzzahlige Matrix $A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ lässt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen über $\mathbb{Z}$ in eine Diagonalmatrix überführen:

$$UAV = D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0),$$

wobei $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, $V \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ und

$$d_i > 0, \qquad d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_r.$$

Dies heißt die *Smith-Normalform* von A.

- Sei nun $L \leqslant \mathbb{Z}^n$ von $v_1, \ldots, v_m$ erzeugt.

- Erst erklären wir, wie die Smith-Normalform hilft uns die endlicherzeugten abelschen Gruppen zu verstehen.

- Ubung: Sei $\alpha\colon G \to G$ ein Automorphismus, und sei $N \triangle G$. Dann $G/N \cong G/\alpha(N)$.

Lemma. Sei $A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ mit Spalten $v_1, \dots, v_m$ und $L := \langle v_1, \dots, v_m\rangle \leqslant \mathbb{Z}^n$.
Sei $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, seien $w_1, \dots, w_m$ die Spalten von UA und $M := \langle w_1, \dots, w_m\rangle$.
Dann gilt $\mathbb{Z}^n/L \cong \mathbb{Z}^n/M$.

Beweis. • Die Matrix U definiert einen Automorphismus von $\mathbb{Z}^n$, der L auf M abbildet.

• dieser induziert einen Isomorphismus $\mathbb{Z}^n/L \to \mathbb{Z}^n/M$. □

Lemma. Sei $A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ mit Spalten $v_1, \dots, v_m$ und $L := \langle v_1, \dots, v_m\rangle \leqslant \mathbb{Z}^n$.
Sei $V \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$, seien $w_1, \dots, w_m$ die Spalten von AV und $M := \langle w_1, \dots, w_m\rangle$.
Dann gilt $L = M$.

Beweis. • Die Spalten von AV sind ganzzahlige Linearkombinationen der Spalten von A. Also gilt $M \subseteq L$.

• Wegen $A = (AV)V^{-1}$ gilt ebenso $L \subseteq M$. □

• Daher SNF zeigt uns:

$$\mathbb{Z}^n/L \cong \mathbb{Z}^n/\langle d_1e_1, \dots, d_re_r\rangle \cong \mathbb{Z}/d_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r \times \mathbb{Z}^{n-r}.$$

- Jetzt beweisen wir dass SNF existiert.
- Wir verwenden elementare ganzzahlige Zeilen- und Spaltenoperationen.
- Zunächst bringen wir A auf Diagonalform:
  - Wähle einen Eintrag $a \neq 0$ und bringe ihn an die Position $(1, 1)$.
  - Mit dem euklidischen Algorithmus können wir alle anderen Einträge in der ersten Zeile und Spalte eliminieren: Entweder ist ein Eintrag ein Vielfaches von a, oder wir erhalten durch Division mit Rest einen neuen Eintrag a mit kleinerem Betrag.
  - Wiederholung und Induktion auf die verbleibende Matrix liefern eine Diagonalmatrix.

- Jetzt möchten wir die Teilbarkeit der Diagonalelement gewährleisten. Für $a, b > 0$ gilt durch elementare Operationen:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathrm{ggT}(a,b) & 0 \\ 0 & \mathrm{kgV}(a,b) \end{pmatrix}.$$

  - Dazu addieren wir die zweite Zeile zur ersten, wenden den euklidischen Algorithmus auf die erste Zeile an, um $\mathrm{ggT}(a,b)$ auf der Position $(1,1)$ zu bekomment, dann eliminieren wir die nichtdiagonalen Positionen.

- Falls $d_1 \nmid d_i$, ersetzen wir diese beiden Diagonaleinträge durch ihren ggT und ihr kgV. Am Ende teilt d_1 alle andere Diagonaleinträge, und wir handelnd d_2 usw. ähnlich.

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Smith-Normalform

4. Semidirekte Produkte

5. Quaternionengruppe

- Wir möchten eine Situation verallgemeinern und benennen, die wir bereits mehrfach gesehen haben.
- Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $N, A \leqslant G$, sodass
  - $N \trianglelefteq G$,
  - $N \cap A = \{e\}$,
  - jedes $g \in G$ als $g = na$ mit $n \in N$, $a \in A$ geschrieben werden kann.
- In dieser Situation heißt G das *semidirekte Produkt* von N und A. Schreibweise: $G = N \rtimes A$.
- Die Diedergruppe:

$$D_n = \underbrace{\langle r \rangle}_{\cong \mathbb{Z}/n} \rtimes \underbrace{\langle s \rangle}_{\cong \mathbb{Z}/2}.$$

  - Wir haben: $srs = r^{-1}$, jedes Element ist der Form sr^k.
- Die symmetrische Gruppe ($n \geqslant 2$): $S_n = A_n \rtimes \langle (1\,2) \rangle$.

- Seien N, A Gruppen und $\alpha\colon A \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir schreiben $a.n := \alpha(a)(n)$.
- Auf der Menge $N \times A$ definieren wir die Multiplikation

$$(n, a)(m, b) := (n(a.m), ab).$$

Lemma. Diese Multiplikation ist assoziativ.

Beweis. • Für $n, m, k \in N$ und $a, b, c \in A$ gilt
$((n, a)(m, b))(k, c) = (n(a.m), ab)(k, c) = (n(a.m)(ab.k), abc)$ und
$(n, a)((m, b)(k, c)) = (n, a)(m(b.k), bc) = (n(a.(m(b.k))), abc)$.

Aber $a.(m(b.k)) = (a.m)(ab.k)$ und die Aussage folgt. □

- Das neutrale Element ist (e_N, e_A): $(e_N, e_A)(x, y) = (e_n(e_A.x), e_A y) = (x, y)$.
- Das Inverse von (n, a) ist $(a^{-1}.n^{-1}, a^{-1})$: $(n, a) \cdot (a^{-1}.n^{-1}, a^{-1}) = (e_N, e_A)$.
- Die so definierte Gruppe heißt das *(äußere) semidirekte Produkt* $N \rtimes_\alpha A$. Es hängt von N, A und der Wirkung α ab.
- Wir identifizieren N mit $N \times \{e_A\}$ und A mit $\{e_N\} \times A$. Dann gilt
$$(e_N, a)(n, e_A)(e_N, a)^{-1} = (a.n, e_A).$$
- Die Wirkung von A auf N ist also genau die Konjugation im semidirekten Produkt.
  - Beispiel: Für $N = \mathbb{Z}/n$ und $A = \mathbb{Z}/2$ definieren wir die Wirkung durch
$$[0].x = x, \qquad [1].x = -x.$$
  Dann gilt
$$(\mathbb{Z}/n) \rtimes (\mathbb{Z}/2) \cong D_n,$$
  wobei $([k], [0])$ der Drehung r^k und $([0], [1])$ der Spiegelung s entspricht.

- Beispiel: eine *invertierbare affine Abbildung* von $\mathbb{K}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$f_{b,A}(x) := Ax + b, \qquad A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \quad b \in \mathbb{K}^n.$$

Diese Abbildungen bilden eine Gruppe $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ bezüglich der Komposition.

- Die Translationen $t_b(x) := x + b$ bilden eine Untergruppe $T \cong (\mathbb{K}^n, +)$.
  - Diese ist normal, denn
$$f_{c,A}\, t_b\, f_{c,A}^{-1} = t_{Ab}.$$

- Die linearen Abbildungen bilden eine Untergruppe $L \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.
  - Es gilt $T \cap L = \{\mathrm{id}\}$.
  - Jede affine Abbildung lässt sich eindeutig als $f_{b,A} = t_b \circ A$ schreiben.

- Also ist
$$\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n \rtimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

- Für die Konstruktion als äußeres semidirektes Produkt verwenden wir die natürliche Wirkung

$$A.b := Ab.$$

Die Multiplikation lautet somit

$$(b, A)(c, B) = (b + Ac, AB).$$

Lemma. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $N, A \leqslant G$, sodass

$$N \trianglelefteq G, \qquad N \cap A = \{e\}, \qquad G = NA.$$

Wir definieren eine Wirkung von A auf N durch

$$a.n := ana^{-1}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\varphi\colon N \rtimes A \to G, \qquad (n, a) \mapsto na$$

ein Isomorphismus.

Beweis. • Die Abbildung φ ist bijektiv: Jedes $g \in G$ lässt sich als na schreiben, und diese Darstellung ist wegen $N \cap A = \{e\}$ eindeutig.

• Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\varphi((n, a)(m, b)) &= \varphi(n(ana^{-1}.m), ab)\\ &= n(ama^{-1})ab\\ &= namb = \varphi(n, a)\varphi(m, b).\end{aligned}$$

- Bemerkung: $A \times B$ ist auch ein semidirektes Produkt, wobei wir die triviale Wirkung $B \to \mathrm{Aut}(A)$ nehmen.
  - $\mathbb{Z}/3 \rtimes \mathbb{Z}/2$ kann man identifizieren nur wenn man die Wirkunng feststellt.
- Bemerkung: $\mathbb{Z}/2 \rtimes \mathbb{Z}/4$, aber $\mathbb{Z}/4$ kann nich als direktes Produkt geschrieben werden.

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Smith-Normalform

4. Semidirekte Produkte

5. Quaternionengruppe

- Wir betrachten in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  - Direktes Nachrechnen ergibt $A^2 = B^2 = -I$ und $AB = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -BA$.

- Jedes Produkt von A, B und ihren Inversen lässt sich daher auf eines der acht Elemente

$$\pm I, \quad \pm A, \quad \pm B, \quad \pm AB$$

reduzieren. Diese sind alle verschieden.

- Wir schreiben nun $i := A$, $j := B$, $k := AB$ und $1 := I$. Die *Quaternionengruppe* ist

$$Q_8 := \langle A, B \rangle = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}.$$

- Die Multiplikation erfüllt

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik.$$

- Somit ist Q_8 eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8.