

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Konjugation und $p$-Gruppen

4. Satz von Cauchy

**Lemma.** (Erster Isomorphiesatz) Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist die Abbildung $\bar{f}\colon G/\ker(f) \to f(G)$, $g\ker(f) \mapsto f(g)$, ein Isomorphismus.

**Lemma.** Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe $G$ ist das Bild eines Homomorphismus $\mathbb{Z}^k \to G$ für ein $k \geqslant 0$.

- Also $G \cong \mathbb{Z}^k/L$, wobei $L < \mathbb{Z}^k$.

- Sei $G$ eine Gruppe und $X$ eine Menge. Eine *Wirkung* von $G$ auf $X$ ist ein Homomorphismus

$$\pi\colon G \to \mathrm{Bij}(X).$$

- oder: eine Abbildung

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g.x$$

sodass $e.x = x$, $(gh).x = g.(h.x)$.

  - Der *Stabilisator* von $x$ ist die Untergruppe $G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}$.
  - Die *Bahn* (oder der *Orbit*) von $x$ ist $G.x := \{g.x \mid g \in G\}$.
  - Die Wirkung ist *treu* wenn $\ker(\pi) = \{e\}$.

- Die Wirkung heißt *transitiv*, falls $G.x = X$ für jedes $x \in X$.

- Sei $H \leqslant G$. Die *Linkswirkung* von $G$ auf $G/H$ ist definiert durch

$$g.(aH) := (ga)H.$$

- Jede transitive Wirkung von $G$ auf einer Menge $X$ entspricht einer Linkswirkung auf $G/H$.

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Konjugation und $p$-Gruppen

4. Satz von Cauchy

Beispiel: Bis auf Isomorphie ist $S_3$ die einzige nichtabelsche Gruppe der Ordnung $6$.

**Beweis.** • Sei $G$ eine nichtabelsche Gruppe mit $|G| = 6$. Nach Lagrange haben alle Elemente Ordnung $1, 2, 3$ oder $6$.

- Ein Element der Ordnung $6$ würde $G$ zyklisch machen. Hätten alle Elemente Ordnung $1$ oder $2$, so wäre $G$ abelsch (denn $(gh)^2 = e$ impliziert $gh = hg$).
- Also gibt es $a \in G$ mit $\mathrm{ord}(a) = 3$.

• $N := \langle a \rangle$ hat Index $2$, ist also normal. Wähle $x \notin N$. Dann $G = \langle a, x \rangle$. Da $G$ nichtabelsch ist und $\mathrm{Aut}(N) \cong \mathbb{Z}/2$, gilt $x^2 = e$.

• Sei $H := \langle x \rangle$. Wir betrachten die Wirkung auf $G/H = \{H, aH, a^2H\}$.

- $a$ wirkt als Dreierzykel $(H\ aH\ a^2H)$.
- Wegen $xax^{-1} = a^2$ vertauscht $x$ die Nebenklassen $aH$ und $a^2H$ und fixiert $H$.

• Diese beiden Permutationen erzeugen $S_3$. Es folgt $G \to \mathrm{Bij}(G/H) \cong S_3$ ist ein Isomorphismus. □

**Satz.** Die Gruppe $G$ der orientierungserhaltenden Isometrien des Würfels ist isomorph zu $S_4$.

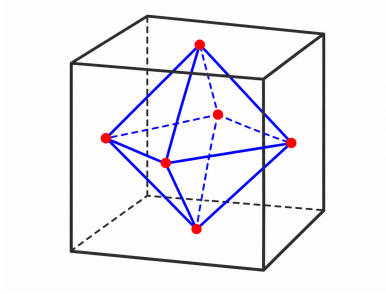
**Beweis.** • Die vier Raumdiagonalen des Würfels werden durch jede Drehung permutiert. Wir erhalten also einen Homomorphismus

$$\varphi\colon G \to S_4.$$

• Dieser ist injektiv: Die einzigen Isometrien, die jede Raumdiagonale erhalten, sind die Identität und die Punktspiegelung am Würfelmittelpunkt. Letztere kehrt die Orientierung um.

• Wir haben $|G| = 6 \cdot 4 = 24 = |S_4|$. Damit ist $\varphi$ ein Isomorphismus. □

- Octaedron und Würfel sind “dual” zu einander:



- Es folgt dass die Isomsetrigruppen gleich sind.

- Jetzt werden wir die Isometriegruppe des Ikosaeders identifizieren.

**Lemma.** Für $n \geqslant 5$ ist $A_n$ der einzige nichttriviale echte Normalteiler von $S_n$.

**Beweis.** • Sei $\{e\} \neq N \trianglelefteq S_n$ und $x \in N \setminus \{e\}$.

• Ubung: $Z(S_n) = \{e\}$. Da die Transpositionen $S_n$ erzeugen, gibt es eine Transposition $\tau$, die nicht mit $x$ kommutiert.

• $x^{-1}\tau x\tau = (x^{-1}\tau x)\tau \in N$.

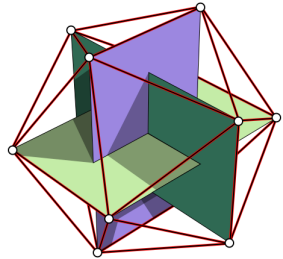
  ▶ ein Dreierzykel oder ein Produkt zweier disjunkter Transpositionen.

• Im zweiten Fall enthält $N$ durch Konjugation alle Produkte zweier disjunkter Transpositionen, also auch $(1\,2)(3\,4)\,(1\,2)(4\,5) = (3\,4\,5)$.

• Somit enthält $N$ einen Dreierzykel, durch Konjugation alle Dreierzyklen und damit ganz $A_n$.

• Wegen $(S_n : A_n) = 2$ folgt $N = A_n$ oder $N = S_n$. □

**Beweis.** • Die folgenden $12$ Ecken des Ikosaeders bilden drei zueinander senkrechte goldene Rechtecke.



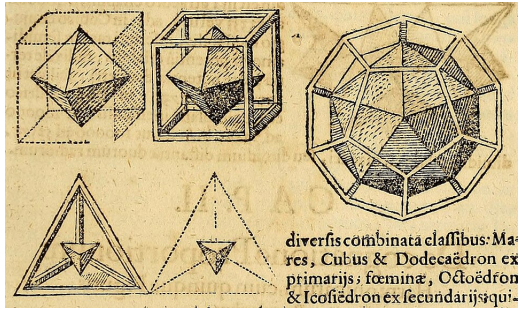
• Es gibt genau fünf solche Anordnungen. Jede Drehung permutiert diese fünf Anordnungen. Wir erhalten einen Homomorphismus

$$\varphi\colon G \to S_5.$$

• Übung: Diese Wirkung ist treu.

• Wir wissen $|G| = 60$. Somit hat $\varphi(G)$ den Index $2$ in $S_5$ und ist daher normal.

- Icosaedron und Dodekaedron sind “dual” zu einander:




- Es folgt dass die Isomsetriegruppen gleich sind.

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Konjugation und $p$-Gruppen

4. Satz von Cauchy

- Sei $p$ eine Primzahl. Eine endliche Gruppe $G$ heißt *$p$-Gruppe*, falls $|G| = p^n$ für ein $n \geqslant 0$.
- Erinnerung: Das *Zentrum* von $G$ ist

$$Z(G) := \{x \in G \mid gx = xg \text{ für alle } g \in G\}.$$

- Eine wichtige Wirkung: $G$ wirkt auf sich selbst durch *Konjugation*:

$$g.x := gxg^{-1}.$$

  - Tatsächlich gilt $(gh).x = g.(h.x)$ und $e.x = x$.
- Der Stabilisator von $x$ heißt der *Zentralisator* von $x$:

$$C_G(x) := \{g \in G \mid gx = xg\}.$$

- Die Bahn von $x$ heißt die *Konjugationsklasse* von $x$: $x^G = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$.
  - $x \in Z(G)$ genau dann, wenn $x^G = \{x\}$.

**Satz.** (Klassengleichung) Sei $G$ eine endliche Gruppe und seien $x_1, \ldots, x_r$ Vertreter aller Konjugationsklassen mit mehr als einem Element. Dann gilt

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} |x_i^G|.$$

**Beweis.** • Die Konjugationsklassen zerlegen $G$.

• Die Klassen mit nur einem Element sind genau die Elemente von $Z(G)$. □

**Korollar.** Das Zentrum einer nichttrivialen endlichen $p$-Gruppe ist nichttrivial.

**Beweis.** • Sei $|G| = p^n$ mit $n \geqslant 1$. Nach der Bahn-Stabilisator-Formel gilt

$$|x_i^G| = \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}.$$

• Es folgt: $|x_i^G|$ ist eine Potenz von $p$. Das Resultat folgt jetzt aus der Klassengleichung. □

- Eine Gruppe $G$ heißt *nilpotent*, wenn die Folge

$$G_0 := G, \qquad G_{i+1} := G_i/Z(G_i)$$

nach endlich vielen Schritten die triviale Gruppe erreicht.

**Korollar.** Jede endliche $p$-Gruppe ist nilpotent.

**Beweis.** • Sei $|G| = p^n$. Alle Gruppen $G_i$ sind ebenfalls $p$-Gruppen.

- Solange $G_i$ nichttrivial ist, gilt nach dem vorherigen Korollar $|Z(G_i)| \geqslant p$. Also

$$|G_{i+1}| = \frac{|G_i|}{|Z(G_i)|} \leqslant \frac{|G_i|}{p}.$$

- Nach spätestens $n$ Schritten erreichen wir die triviale Gruppe. □

1. Wiederholung

2. Beispiele

3. Konjugation und $p$-Gruppen

4. Satz von Cauchy

**Satz.** (Cauchy) Sei $G$ eine endliche Gruppe und $p$ eine Primzahl mit $p \mid |G|$. Dann enthält $G$ ein Element der Ordnung $p$.

**Beweis.** • Wir betrachten die Menge

$$X := \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = e\}.$$

- Es gilt: $|X| = |G|^{p-1}$, also $p \mid |X|$.

• Die Gruppe $\mathbb{Z}/p$ wirkt auf $X$ durch zyklische Verschiebung:

$$(g_1, g_2, \ldots, g_p) \mapsto (g_2, \ldots, g_p, g_1).$$

• Jede Bahn hat Länge $1$ oder $p$. Die Bahnen der Länge $1$ bestehen genau aus den Tupeln $(g, \ldots, g)$ mit $g^p = e$.

• Da $p \mid |X|$, muss die Anzahl dieser Tupel durch $p$ teilbar sein. Eines davon ist $(e, \ldots, e)$. Also gibt es mindestens ein weiteres. □