

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Normalteiler und Homomorphismen

3. Gruppenwirkungen

- Eine Abbildung $f\colon G \to H$ zwischen Gruppen heißt *Homomorphismus*, falls $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in G$.

- Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$. Für $g \in G$ definieren wir die *Linksnebenklasse* $gH := \{gh \mid h \in H\}$ und die *Rechtsnebenklasse* $Hg := \{hg \mid h \in H\}$.

Lemma. Zwei Linksnebenklassen von H sind entweder gleich oder disjunkt. Dasselbe gilt für Rechtsnebenklassen.

Lemma. Alle Nebenklassen von H haben dieselbe Kardinalität $|H|$.

- Der *Index* $(G : H)$ ist die Anzahl der Linksnebenklassen von H in G.

$$|G| = (G : H) \cdot |H|.$$

Satz. (Lagrange) Sei G eine endliche Gruppe und $H \leqslant G$. Dann $|H| \mid |G|$.

Insbesondere gilt $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$ für jedes $g \in G$.

Korollar. Für jede Primzahl p gibt es bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung p, nämlich $\mathbb{Z}/p$.

1. Wiederholung

2. Normalteiler und Homomorphismen

3. Gruppenwirkungen

- Eine Untergruppe $N \leqslant G$ heißt *normal* (oder *Normalteiler*), falls $gNg^{-1} = N$ für alle $g \in G$.
  - Schreibweise: $N \trianglelefteq G$.
- Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann ist $\ker(f)$ ein Normalteiler von G.
- Umgekehrt, ist auch jeder Normalteiler gleich mit $\ker(f)$ für einen Homomorphismus f.
  - Sei $N \trianglelefteq G$. Die Menge der Linksnebenklassen (=Rechtsnebenklassen) $G/N := \{gN \mid g \in G\}$ heißt die *Faktorgruppe* von G nach N.
  - Multiplikation: $(gN)(hN) := (gh)N$
  - Die Abbildung $\pi\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$, ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\ker(\pi) = N$. "Faktorabbildung", "Quotientenabbildung".

Lemma. (Erster Isomorphiesatz) Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist die Abbildung $\bar{f}\colon G/\ker(f) \to f(G)$, $g\ker(f) \mapsto f(g)$, ein Isomorphismus.

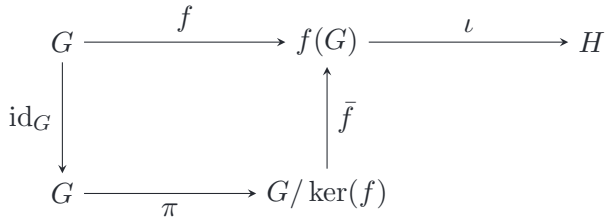
Beweis. • Für $g, h \in G$ gilt $g\ker(f) = h\ker(f)$ genau dann, wenn $h^{-1}g \in \ker(f)$, also genau dann, wenn $f(g) = f(h)$.

- Es folgt: $\bar{f}$ ist wohldefiniert und injektiv.

• Surjektivität von $\bar{f}$ ist klar

• Schließlich gilt $\bar{f}((gN)(hN)) = f(gh) = f(g)f(h) = \bar{f}(gN)\bar{f}(hN)$. □

- Der erste Isomorphiesatz besagt informell: Jeder Homomorphismus “ist” eine Quotientenabbildung



- Das Diagramm “kommutiert”.

Beispiele

- Der triviale Homomorphismus $G \to \{e\}$:
  - $G/G \cong \{e\}$.
- Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$, $k \mapsto [k]$:
  - $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n$.
- Die Signatur $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{1, -1\}$, für $n \geqslant 2$:
  - $S_n/A_n \cong \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2$.
- Die Determinante $\det\colon \operatorname{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$:
  - $\operatorname{GL}(n, \mathbb{K})/\operatorname{SL}(n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.

- Die Abbildung $(\mathbb{R}, +) \to \mathrm{U}(1)$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$:
  - $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1)$.
- Die Abbildung $G \to \mathrm{Inn}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$, wobei $\varphi_g(x) := gxg^{-1}$:
  - $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.
- Da $\mathbb{Z}^2$ abelsch ist, ist jede Untergruppe $L \leqslant \mathbb{Z}^2$ normal. Wir können also $\mathbb{Z}^2/L$ betrachten.
  - $\mathbb{Z}^2/(2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{Z}/6$.
  - $\mathbb{Z}^2/(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.
  - $\mathbb{Z}^2/\langle (2,0), (1,3) \rangle \cong \mathbb{Z}/6$.
    - Übung; Hinweis: Homomorphismus $(x, y) \mapsto [3x + y]$ nach $\mathbb{Z}/6$.

- Unser zukünftiges Ziel: Alle endlich erzeugten abelschen Gruppen bis auf Isomorphie beschreiben.

Lemma. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G ist das Bild eines Homomorphismus $\mathbb{Z}^k \to G$ für ein $k \geqslant 0$.

Beweis.
- Sei $G = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$.
- Wir definieren $f \colon \mathbb{Z}^k \to G$ durch $f(n_1, \ldots, n_k) := g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k}$.
- Da G abelsch ist, ist f ein Homomorphismus.
- Da die g_i die Gruppe erzeugen, ist f surjektiv. □
- Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt $G \cong \mathbb{Z}^k / \ker(f)$.
- Wir möchten also verstehen: Wie sehen die Untergruppen von $\mathbb{Z}^k$ aus, und welche Quotienten $\mathbb{Z}^k / L$ können entstehen?
- Bemerkung: das obige Lemma motiviert die Bezeichnung *freie abelsche Gruppe vom Rang* k für $\mathbb{Z}^k$.

1. Wiederholung

2. Normalteiler und Homomorphismen

3. Gruppenwirkungen

- Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine *Wirkung* von G auf X ist ein Homomorphismus

$$\pi\colon G \to \mathrm{Bij}(X).$$

- Beispiel: Die Isometriegruppe $G \subset O(3,\mathbb{R})$ eines platonischen Körpers wirkt auf
  - der Menge seiner Ecken,
  - der Menge seiner Kanten,
  - der Menge seiner Flächen.
- Häufig beschreiben wir eine Wirkung stattdessen durch eine Abbildung

$$G \times X \to X, \qquad (g,x) \mapsto g.x := \pi(g)(x).$$

  - Es gilt für alle $g,h \in G$ und $x \in X$:

$$e.x = x, \qquad (gh).x = g.(h.x).$$

  - Übung: Umgekehrt definiert jede solche Abbildung $G \times X \to X$, eine Wirkung von G auf X.

- Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt, und $x \in X$.
  - Der *Stabilisator* von x ist die Untergruppe
$$G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}.$$
  - Die *Bahn* (oder der *Orbit*) von x ist
$$G.x := \{g.x \mid g \in G\}.$$
- Die Wirkung heißt *transitiv*, falls $G.x = X$ für jedes $x \in X$.
- Beispiel: Die Isometriegruppe G des Würfels wirkt transitiv auf der Menge seiner 6 Flächen.
  - Der Stabilisator einer Fläche hat 8 Elemente (die Symmetrien eines Quadrats).
- Sei $H \leqslant G$. Die *Linkswirkung* von G auf G/H ist definiert durch
$$g.(aH) := (ga)H.$$

Satz. Jede transitive Wirkung von G auf einer Menge X entspricht einer Linkswirkung auf G/H.

Genauer: Sei $x \in X$ und $H := G_x$. Dann ist die Abbildung

$$f\colon G/H \to X, \qquad aH \mapsto a.x$$

eine Bijektion, und für jedes $g \in G$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \\ {\scriptstyle g.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g.} \\ G/H & \xrightarrow[\quad f \quad]{} & X \end{array}$$

Beweis. • $aH = bH \iff b^{-1}a \in H \iff a.x = b.x$. Also ist f wohldefiniert und injektiv.

• Wegen der Transitivität ist f surjektiv. Es gilt $f(g.(aH)) = (ga).x = g.(a.x)$. □

Korollar. (Bahn-Stabilisator-Formel) Für jede Wirkung einer endlichen Gruppe G auf X und jedes $x \in X$ gilt

$$|G.x| \cdot |G_x| = |G|.$$