

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Homomorphismen

3. Nebenklassen

4. Normalteiler und Quotientengruppen

- Die *Parität* einer Permutation ist wohldefiniert: Eine Permutation heißt *gerade*, falls sie ein Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist, sonst *ungerade*.
- Die Gruppe der geraden Permutationen in S_n heißt *alternierende Gruppe*: $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$.
- Eine Bijektion $f\colon G \to H$ zwischen zwei Gruppen heißt *Isomorphismus*, falls $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in G$.
  - Dann auch $f(e_G) = e_H$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
- Zwei zyklische Gruppen derselben Ordnung sind isomorph.
- Die Isometriegruppe G gleichseitigen Dreiecks ist isomorph zu S_3.

- Ein *Automorphismus* einer Gruppe G ist ein Isomorphismus $G \to G$.
  - Für $g \in G$ ist die Abbildung $\varphi_g \colon G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$, ein *innerer Automorphismus*.
  - Übung: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Satz. (Cayley) Jede Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Bij}(G)$. Insbesondere ist jede endliche Gruppe der Ordnung n isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

- $G \to \mathrm{Bij}(G)$, $g \mapsto \lambda_g$, wobei $\lambda_g(x) := gx$.
- Bemerkung: ein Vektorraum (über einem beliebigen Körper) ist eine abelsche Gruppe.

- Erinnerung: Für $\sigma \in S_n$ definieren wir eine lineare Abbildung $T_\sigma \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ durch $T_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist.
  - Die Matrix P_σ dieser Abbildung heißt *Permutationsmatrix* von σ.
  - Beispiele: $P_{(1\,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{(1\,2\,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Wiederholung

2. Homomorphismen

3. Nebenklassen

4. Normalteiler und Quotientengruppen

- Eine Abbildung $f\colon G \to H$ zwischen Gruppen heißt *Homomorphismus*, falls $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in G$.
- Übung: $f(e_G) = e_H$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
- Beispiele:
  - Die Signatur $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{1, -1\}$ ist ein Homomorphismus.
  - Die inneren Automorphismen bilden eine Untergruppe $\operatorname{Inn}(G) := \{\varphi_g \mid g \in G\} \leqslant \operatorname{Aut}(G)$. Die Abbildung $G \to \operatorname{Inn}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$, ist ein Homomorphismus, denn für alle $g, h, x \in G$ gilt $\varphi_{gh}(x) = ghx(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \varphi_g(\varphi_h(x))$.
  - Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$, $k \mapsto [k]$, ist ein surjektiver Homomorphismus, denn $[k + l] = [k] + [l]$.

- Für jede Untergruppe $H \leqslant G$ ist die Inklusion $H \to G$, $h \mapsto h$, ein injektiver Homomorphismus.
  - Im Beweis des Satzes von Cayley haben wir einen injektiven Homomorphismus $G \to \mathrm{Bij}(G)$ konstruiert.
- Die Abbildung $S_n \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $\sigma \mapsto P_\sigma$, ist ein injektiver Homomorphismus.
- Der *triviale Homomorphismus* $G \to \{e\}$, $g \mapsto e$.
- Die Identität $\mathrm{id}_G \colon G \to G$, $g \mapsto g$.

- Sei $f \colon G \to H$ ein Homomorphismus. Der *Kern* von f ist $\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$.

- Übung: Zeigen Sie, dass $\ker(f)$ eine Untergruppe von G und das Bild $f(G)$ eine Untergruppe von H ist.

- Ein injektiver Homomorphismus heißt auch *Monomorphismus*, ein surjektiver Homomorphismus *Epimorphismus*. Ein Homomoprhismus $G \to G$ heißt ein *Endomorphismus von* G.
  - Übung: Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus $f\colon G \to H$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn $\ker(f) = \{e_G\}$.
  - Übung: Zeigen Sie, dass jeder injektive Homomorphismus $f\colon G \to H$, als Abbildung $G \to f(G)$ betrachtet, ein Isomorphismus ist.

Beispiele.

- Der triviale Homomorphismus $f\colon G \to \{e\}$: $\ker(f) = G$, $f(G) = \{e\}$.
- Die Identität $\mathrm{id}_G\colon G \to G$: $\ker(\mathrm{id}_G) = \{e\}$, $\mathrm{id}_G(G) = G$.
- Der Homomorphismus $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$, $k \mapsto [k]$: $\ker(f) = n\mathbb{Z}$, $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n$.
- Die Signatur $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{1, -1\}$, $n \geqslant 2$: $\ker(\mathrm{sgn}) = A_n$, $\mathrm{sgn}(S_n) = \{1, -1\}$.

- Die Abbildung $(\mathbb{R}, +) \to \mathrm{U}(1)$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$, ist ein surjektiver Homomorphismus.
  - Kern: $\mathbb{Z}$; Bild: $\mathrm{U}(1)$.
- Die Determinante $\det\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$, $A \mapsto \det(A)$, ist ein surjektiver Homomorphismus.
  - Kern: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$; Bild: $\mathbb{K}^*$.
- Die Inklusion $f\colon H \to G$ für $H \leqslant G$: $\ker(f) = \{e\}$, $f(H) = H$.
- Der Homomorphismus $f\colon G \to \mathrm{Inn}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$: $f(G) = \mathrm{Inn}(G)$ und $\ker(f) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}$.
  - Die Untergruppe $Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}$ heißt das *Zentrum* von G. Also $\ker(f) = Z(G)$.

1. Wiederholung

2. Homomorphismen

3. Nebenklassen

4. Normalteiler und Quotientengruppen

- Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$. Für $g \in G$ definieren wir die *Linksnebenklasse* $gH := \{gh \mid h \in H\}$ und die *Rechtsnebenklasse* $Hg := \{hg \mid h \in H\}$.

Beispiel: $G := S_n$ und $H := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$, der *Stabilisator* von 1.

- Für $g \in S_n$ besteht die Nebenklasse gH aus genau den Permutationen, die 1 auf $g(1)$ abbilden.
  - Denn $\sigma \in gH$ genau dann, wenn $g^{-1}\sigma \in H$, also $\sigma(1) = g(1)$.
- Damit erhalten wir die Zerlegung $S_n = H \sqcup (1\,2)H \sqcup (1\,3)H \sqcup \ldots \sqcup (1\,n)H$.
  - Diese Nebenklassen sind paarweise disjunkt.
- Außerdem ist gHg^{-1} der Stabilisator von $g(1)$.
  - Denn $\sigma \in gHg^{-1}$ genau dann, wenn $(g^{-1}\sigma g)(1) = 1$, also $\sigma(g(1)) = g(1)$.

Lemma. Zwei Linksnebenklassen von H sind entweder gleich oder disjunkt. Dasselbe gilt für Rechtsnebenklassen.

Beweis. • Falls $x \in gH \cap kH$, so gibt es $h_1, h_2 \in H$ mit $x = gh_1 = kh_2$. Also gilt $gH = gh_1H = xH = kh_2H = kH$.

- Für Rechtsnebenklassen analog. □
- Jedes Element $x \in gH$ heißt *Nebenklassenvertreter* von gH.
  - Wir haben $xH = gH$.
- Ebenso ist jedes $x \in Hg$ ein Vertreter von Hg, und $Hx = Hg$.

Lemma. Alle Nebenklassen von H haben dieselbe Kardinalität $|H|$.

Beweis. • Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $H \to gH$, $h \mapsto gh$, bijektiv. Also gilt $|gH| = |H|$. □

- Der *Index* $(G : H)$ ist die Anzahl der Linksnebenklassen von H in G.
  - ▶ Übung: gleich wenn wir die Rechtsnebenklassen stattdessen verwenden.

• Da die Linksnebenklassen paarweise gleich oder disjunkt sind und ganz G überdecken, folgt eine endliche Gruppe G die Formel:

$$|G| = (G : H) \cdot |H|.$$

Satz. (Lagrange) Sei G eine endliche Gruppe und $H \leqslant G$. Dann $|H| \mid |G|$.

Insbesondere gilt $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$ für jedes $g \in G$.

Beweis. • Die erste Aussage folgt aus $|G| = (G : H) \cdot |H|$.

• Für die zweite wenden wir die erste auf $H := \langle g \rangle$ an, und benutzen $|\langle g \rangle| = \mathrm{ord}(g)$. □

Korollar. Für jede Primzahl p gibt es bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung p, nämlich $\mathbb{Z}/p$.

Beweis. • Sei G eine Gruppe der Ordnung p und $g \in G$, $g \neq e$. Nach dem Satz von Lagrange teilt $\mathrm{ord}(g)$ die Zahl p. Da $\mathrm{ord}(g) > 1$, gilt $\mathrm{ord}(g) = p$.

• Also ist $G = \langle g \rangle$ zyklisch und damit isomorph zu $\mathbb{Z}/p$. □

1. Wiederholung

2. Homomorphismen

3. Nebenklassen

4. Normalteiler und Quotientengruppen

- Eine Untergruppe $N \leqslant G$ heißt *normal* (oder *Normalteiler*), falls $gNg^{-1} = N$ für alle $g \in G$.
  - Schreibweise: $N \trianglelefteq G$.
- Beispiele:
  - In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe normal.
  - $A_n \trianglelefteq S_n$, weil $\operatorname{sgn}(g\sigma g^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.
- Gegenbeispiel: Der Stabilisator von 1 in S_n, für $n \geqslant 3$, ist nicht normal.
  - $(2\,3)$ fixiert 1, aber $(1\,2)(2\,3)(1\,2) = (1\,3)$ nicht.
- Eine Untergruppe $N \leqslant G$ ist genau dann normal, wenn $gN = Ng$ für alle $g \in G$.

Lemma. Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann ist $\ker(f)$ ein Normalteiler von G.

Beweis. • Für $x \in \ker(f)$ und $g \in G$ gilt $f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} = e_H$.

- Also $g\ker(f)g^{-1} \subseteq \ker(f)$.
- Mit g^{-1} statt g folgt $g^{-1}\ker(f)g \subseteq \ker(f)$, also $\ker(f) \subseteq g\ker(f)g^{-1}$. □

- Sei $N \trianglelefteq G$. Die Menge der Linksnebenklassen (=Rechtsnebenklassen) $G/N := \{gN \mid g \in G\}$ heißt die *Faktorgruppe* von G nach N.

Lemma. Durch $(gN)(hN) := (gh)N$ wird G/N zu einer Gruppe.

Beweis. • Wohldefiniert: Seien $g' = ga$ und $h' = hb$ mit $a, b \in N$.

  - $g'h' = gahb = gh(h^{-1}ah)b \in ghN$, also $g'h'N = ghN$.

• Assoziativität folgt aus der Assoziativität in G. Das neutrale Element ist $N = eN$, und das Inverse von gN ist $g^{-1}N$. □

• Die Abbildung $\pi\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$, ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\ker(\pi) = N$.