

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Organisatorisches

2. Mengen mit einer Verknüpfung

3. Gruppen: grundlegende Eigenschaften und Beispiele

- Alle Lehrmaterialien und wichtigen Nachrichten auf Moodle.
- Prüfungszulassung: 3 Tests (ca. in der 5., 9. und 13. Woche); mindestens 50% der Punkte erforderlich.
  - ► Testaufgaben werden aus einer vorher bekannten Liste von Hausaufgaben ausgewählt (und leicht verändert).
- Jede Woche ein neues Aufgabenblatt.
  - ► Freiwillige Abgabe über Moodle möglich; wird benotet, aber die Note hat keinen Einfluss auf die Prüfungszulassung.

- Weitere Moodle-Website: ̈Informations for students in mathematics (Bachelor/Master)"

https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=59139

- Hauptziel der Vorlesung: Einführung in die wichtigsten algebraischen Begriffe und Strukturen, die in vielen Bereichen der Mathematik verwendet werden.
  - Insbesondere Gruppen, mit zahlreichen Anwendungen in Physik und Chemie.
- Einige klassische Sätze: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen; die Lösungen von $X^5 - X - 1 = 0$ kann man mit Grundoperationen und Wurzelziehen nicht ausdrücken.
- Weiteres Ziel: Erfahrung mit komplexeren mathematischen Begriffen und Theorien.
  - Bachelorarbeit: eine bestehende mathematische Theorie bearbeiten und zeigen, dass Sie diese verstanden haben.
- Weiteres Ziel: einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung zu einigen Themen geben.

- KI-nutzung: als “Sparring-Partner” bei den Hausaufgaben, Konzepte-Erklärung
  - ► Minimum (von mir) empfohlen: etwa chatgpt 5.6 sol. Abraten: die freie chatgpt-Version.
  - ► Wir versuchen mit Rektorat zu diskutieren, wie wir den Studierenden den Zugang zu solcher KI gewährleisten können, aber es wird dauern bis wir dies erreichen.
  - ► Sebstverständlich: ohne KI kann man auch sehr gut Mathematik lernen.

1. Organisatorisches

2. Mengen mit einer Verknüpfung

3. Gruppen: grundlegende Eigenschaften und Beispiele

- Eine Menge M mit einer Verknüpfung: $(M, \cdot)$ wobei $\cdot \colon M \times M \to M$.
- *Assoziative* Verknüpfung: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in M$.
  - Eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung heißt *Halbgruppe*.
- Ein Element $e \in M$ heißt *neutrales Element*, falls $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle $a \in M$.
(Eindeutigkeit: $e = e \cdot e' = e'$)
  - Wir schreiben auch 1 oder 1_M oder e_M für das neutrale Element in $(M, \cdot)$
- Eine Halbgruppe mit neutralem Element heißt *Monoid*.
- Eine Verknüpfung heißt *kommutativ* oder *abelsch*, falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in M$.
  - In diesem Fall schreibt man auch $+$ statt $\cdot$.
  - und statt e schreibt man 0 oder 0_M.

Beispiele.

- Die Menge aller Abbildungen $X \to X$ mit Komposition.
  - Neutrales Element: id_X.
- Die Menge $M_n(\mathbb{K})$ aller $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$, mit Matrizenmultiplikation.
  - Neutrales Element: die Einheitsmatrix I_n.
- Alle endlichen Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$, mit Konkatenation.
  - Beispiele: a, abb, bba, $baba$, $aaaa$, ...
  - Neutrales Element: das leere Wort.
  - Dieses Monoid heißt das *freie Monoid* über $\{a, b\}$.
- Die geraden ganzen Zahlen $2\mathbb{Z}$ mit Multiplikation: Halbgruppe, aber kein Monoid.

- Sei $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe. Eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq S$ heißt *Unterhalbgruppe*, falls $a \cdot b \in T$ für alle $a, b \in T$.

- Sei $(M, \cdot)$ ein Monoid mit neutralem Element e. Eine Unterhalbgruppe $N \subseteq M$ heißt *Untermonoid*, falls $e \in N$.

- Beispiele:
  - Die oberen Dreiecksmatrizen bilden ein Untermonoid von $M_n(\mathbb{K})$ (mit Matrizenmultiplikation).
  - $2\mathbb{Z}$ ist eine Unterhalbgruppe von $(\mathbb{Z}, \cdot)$, aber kein Untermonoid.

- Für drei Elemente a, b, c einer Halbgruppe gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  - Wir können also einfach $a \cdot b \cdot c$ schreiben, ohne Klammern anzugeben.
- Übung. Sei S eine Halbgruppe und seien $a_1, \ldots, a_n \in S$. Dann ist das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ unabhängig davon, wie die Klammern gesetzt werden.
  - Insbesondere können wir die Klammern immer weglassen.

- Für $x \in S$ und $n \geqslant 1$ schreiben wir $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{-mal}}$.
  - In einem Monoid setzen wir außerdem $x^0 := e$.
- Bei additiver Schreibweise verwenden wir nx statt x^n, also $nx := \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}$.
- Aus der Assoziativität folgen die *Potenzgesetze*: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ und $(x^m)^n = x^{mn}$.
  - Bei additiver Schreibweise: $mx + nx = (m+n)x$ und $m(nx) = (mn)x$.
- Übung: in einem abelschem Monoid gilt auch: $x^n y^n = (xy)^n$.

- Ein Element x eines Monoids heißt *invertierbar*, falls es ein y gibt mit $xy = yx = e$.
  - Ein solches y ist eindeutig: $y = ye = y(xy') = (yx)y' = ey' = y'$. Es wird mit x^{-1} bezeichnet.
- Für invertierbares x definieren wir $x^{-n} := (x^{-1})^n$ für $n \geqslant 1$.
  - Übung: falls x invertierbar ist dann auch x^n für alle $n \in \mathbb{Z}$ invertierbar ist, und gilt: $(x^n)^{-1} = x^{-n}$.
  - Übung: die Potenzgesetze gelten dann für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ (z.B. $m \geqslant 0$, $n < 0$ dann $(x^m)^n$ nach der obigen Übung macht Sinn)
- Bei additiver Schreibweise wird das Inverse von x mit $-x$ bezeichnet. Für $n \geqslant 1$ setzen wir $(-n)x := n(-x)$.

1. Organisatorisches

2. Mengen mit einer Verknüpfung

3. Gruppen: grundlegende Eigenschaften und Beispiele

- Eine *Gruppe* ist ein Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist.
- Explizit: Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\cdot\colon G \times G \to G$, sodass:
  - (Assoziativität) $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in G$.
  - (Neutrales Element) Es gibt $e \in G$ mit $ea = ae = a$ für alle $a \in G$.
  - (Inverse Elemente) Für jedes $a \in G$ gibt es $b \in G$ mit $ab = ba = e$.
- Eine Gruppe heißt *abelsch*, falls $ab = ba$ für alle $a, b \in G$.
- Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe*, falls $e \in H$, $xy \in H$ für alle $x, y \in H$ und $x^{-1} \in H$ für alle $x \in H$.
  - Schreibweise: $H \leqslant G$.
  - triviale Untergruppe $\{e\} \leq G$
  - richtige Untergruppe: $H \lneq G$.

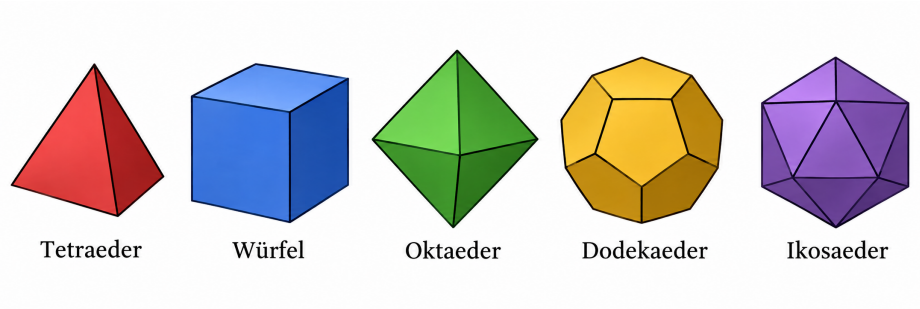
Beispiele.

- Die Menge $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. “Allgemeine lineare Gruppe”
  - Neutrales Element: I_n.
- Die Menge $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. “Spezielle lineare Gruppe”
  - $I_n \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$
  - falls $X, Y \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ dann $\det(XY) = \det(X)\det(Y) = 1$
  - falls $X \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ dann $\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det(X)} = 1$.

- Die *unitäre Gruppe* $\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^{\cdot} A = I_n\}$,
  - Die *spezielle unitäre Gruppe* $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1\}$.
- Die *orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$.
  - Die *spezielle orthogonale Gruppe* $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$.
- Die *Lorentzgruppe* $\mathrm{O}(1,3) := \{A \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$, wobei $J := \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.
  - Sie erhält die quadratische Form $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
- Die *allgemeine lineare Gruppe über* $\mathbb{Z}$: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) := \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = \pm 1\}$.
  - Die *spezielle lineare Gruppe über* $\mathbb{Z}$: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) := \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$. Sie ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.

- $\mathrm{GL}(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{0\} =: \mathbb{K}^*$
- $\mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \colon |\mathbf{z}|\}$. Auch S^1.
- $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe, man kann sie als die Untegruppe $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ verstehen.
- $(\mathbb{Z}, +)$

- Wir erinnern uns: Es gibt genau fünf platonische Körper.



- Jedem dieser Körper können wir eine Untergruppe von $\mathrm{O}(3)$ zuordnen: die Gruppe aller Isometrien, die den Körper auf sich selbst abbilden.

- Übung: Bestimmen Sie für jeden der fünf platonischen Körper die Kardinalität $|G|$ dieser Gruppe.

- Für eine Menge X bilden die Bijektionen $X \to X$ mit Komposition eine Gruppe.
  - Neutrales Element: id_X; Inverse: Umkehrabbildung f^{-1}.
  - Schreibweise $\mathrm{Bij}(X)$.
- Insbesondere für $X = \{1, \ldots, n\}$: $S_n := \mathrm{Bij}(X)$.
  - Die Elemente heißen *Permutationen*.
  - Übung: $|S_n| = n!$.